

Objectif SUP 2026

1 Calculs sur les Fractions

EXERCICE 1.1 : Simplifier les fractions suivantes où a, b, c et d désignent des réels non nuls.

$$F_1 = \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}} \quad , \quad F_2 = \frac{\frac{a}{b}}{c} \quad (\text{remarquer l'importance de bien écrire})$$

$$F_3 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{d}} \quad , \quad F_4 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{a}}}{\frac{b}{c}} \quad , \quad F_5 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{d}} \quad , \quad F_6 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{d}}$$

EXERCICE 1.2 : Simplifier les fractions suivantes sans effectuer de produit.

$$A = \frac{56 \times 24}{49 \times 64} \quad B = \frac{72 \times 35}{45 \times 56} \quad C = \frac{63 \times 21}{36 \times 49}$$

EXERCICE 1.3 : Calculer les quantités suivantes sans utiliser de calculatrice !

$$D = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \quad , \quad E = \frac{1}{21} + \frac{3}{14} - \frac{2}{3} \quad , \quad F = A + B - C$$

EXERCICE 1.4 : Simplifier les fractions suivantes où n désigne un entier naturel.

On donne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ avec la convention $0! = 1$

et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$1. \quad G_1 = \frac{n!}{(n-1)!} \quad , \quad G_2 = \frac{n!}{(n-2)!} \quad , \quad G_3 = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \quad , \quad G_4 = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

2. Donner une expression simple de :

$$\binom{n}{k} \text{ pour } k = 0, k = 1, k = 2, \text{ puis } k = n, k = n-1 \text{ et } k = n-2.$$

Conjecturer une formule et la démontrer.

EXERCICE 1.5 : Simplifier $f(x)$ où x désigne un réel. On précisera le domaine de définition de f .

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 7x + 12)}{(x^2 - 4x + 3)(x-5)}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2x - 15)}$$

$$4. \quad f(x) = \frac{(x^2 - 16)(x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x - 3)}$$

2 Calculs sur les Puissances

EXERCICE 2.1 : Simplifier les écritures suivantes où a, b, c, d désignent des réels non nuls et n, p, q des entiers relatifs

$$(a^n)(a^p) \quad , \quad (a^n)^p \quad , \quad (a^{n+p})^q \quad , \quad (a^p)^p \quad , \quad (a^p)(a^p) \quad , \quad (a^2)^p \quad ,$$

$$(a^n \times b^p)^q \quad , \quad (a^n)^p \times (b^p)^n \quad , \quad \frac{(a^n)^p \times b^n}{(a^p)^q \times b^{n+p}} \quad , \quad \frac{(a^n b)^p \times (c^n a)^q}{(a^p c)^q \times (b^n c^q)^p}$$

EXERCICE 2.2 : Vrai ou faux

1. a) $2^n + 4^n = 6^n$ b) $2^n + 4^n = 8^n$ c) $2^n + 4^n = 2^n(1 + 2^n)$
2. a) $2^n + 3^n + 6^n = 2 \times 6^n$ b) $2^n + 3^n + 6^n = (2^n + 1)(3^n + 1) - 1$
3. a) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{12^n}$ b) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$ c) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{8^n}$

On rappelle que : pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$)

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée de x est l'unique réel y tel que $y^2 = x$)
- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (racine n-ième de x est l'unique réel y tel que $y^n = x$)

EXERCICE 2.3 : Simplifier les écritures suivantes où a, b désignent des réels strictement positifs et n, p, q des entiers naturels non nuls

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q, \quad \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{n}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{n}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{2}}, \quad (ab)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{q}}}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)\left(b^{\frac{1}{q}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)}$$

EXERCICE 2.4 : Simplifier les écritures suivantes où a, b désignent des réels strictement positifs.

$$\sqrt{\sqrt{a^8}}, \quad \sqrt{\sqrt[3]{a^2}}, \quad \sqrt[5]{\sqrt{a^{30}}}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{pn}}}, \quad \sqrt[4]{\sqrt{a^{10}} \times \sqrt[3]{b^{12}}}, \quad \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{a^{24}}} \times \sqrt[3]{4\sqrt[4]{b^{30}}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{(ab)^{15}}}},$$

$$\frac{\sqrt[4]{5\sqrt{a^{30}}} \times \sqrt[3]{4\sqrt[4]{b^{30}}}}{\sqrt[5]{3\sqrt{(ab)^{30}}}}, \quad \left(\sqrt[5]{3\sqrt{a^2}}\right)^{12}, \quad \left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{10}}\right)^9$$

EXERCICE 2.5 : Vrai ou faux

1. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$
2. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a^2}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}} = a^p$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^q}}$
6. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{pq}}$
7. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}}$
8. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = (\sqrt[n]{a})^{pq}$
9. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{ab}}$
10. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{(ab)^2}}$
11. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{ab}}$
12. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n b^p}}$

3 Calculs sur les fractions et les racines

Si a et b sont des réels strictement positifs, on appelle quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ le réel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (et réciproquement).

EXERCICE 3.1 : Simplifier les fractions suivantes de sorte que le dénominateur ne présente plus de $\sqrt{}$:

$$1. (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$3. \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$4. A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$$

$$5. B = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$6. C = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$7. \text{ Plus difficile : } D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

4 Développements - Factorisations : identités remarquables

EXERCICE 4.1 : Soient a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que :

$$(a) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(b) \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(c) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(d) \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$(e) \quad a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

2. Développer :

$$(a) \quad (a - b)^3$$

$$(b) \quad (a - b)^4$$

$$(c) \quad (a + b)^5$$

$$(d) \quad (a - b)^5$$

3. Factoriser :

$$(a) \quad a^3 + b^3$$

$$(b) \quad a^5 + b^5$$

5 Produits de Polynômes

Un exemple pour calculer rapidement un produit de deux polynômes :

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{rcll} \text{On a : } P(x)Q(x) & = & x^5 & -4x^4 & +5x^3 \\ & & +2x^4 & -8x^3 & +10x^2 \\ & & & -x^3 & +4x^2 - 5x \\ & & & & +3x^2 - 12x + 15 \end{array}$$

$$\text{donc } P(x)Q(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 17x + 15$$

Cette disposition permet d'accéder rapidement aux termes de mêmes degrés

On peut aussi disposer en commençant par les termes de plus petit degré

Pour cela on écrit : $P(x)Q(x) = (3 - x + 2x^2 + x^3)(5 - 4x + x^2)$

NB : Si vous êtes très à l'aise, vous pouvez écrire :

$$P(x)Q(x) = (x^3 + 2x^2 - x + 3)$$

$$\begin{aligned}
& \times (x^2 - 4x + 5) \\
& = x^5 + (1 \times (-4) + 2 \times 1)x^4 + (1 \times 5 + 2 \times (-4) + (-1) \times 1)x^3 \\
& \quad + (2 \times 5 + (-1) \times (-4) + 3 \times 1)x^2 + ((-1) \times 5 + 3 \times (-4))x + 3 \times 5
\end{aligned}$$

Pour remplir la parenthèse devant x^4 :

on part du terme en x^3 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^1 dans $Q(x)$

puis on passe au terme en x^2 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^2 dans $Q(x)$

puis on passe au terme en x^1 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^3 dans $Q(x)$

puis on passe au terme en x^0 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^4 dans $Q(x)$

EXERCICE 5.1 : Développer les produits suivants :

1. $g_1(x) = (2x^3 - 3x + 1)(x^4 + 2x^2 - 4x + 1)$
2. $g_2(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(x^3 - 2x + 2)$
3. $g_3(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 + x - 1)(x^3 + 2x^2 - 1)$
4. $g_4(x) = (x^3 + x + 1)(x^4 - 2x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$

EXERCICE 5.2 : On pose $g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

1. Calculer $h(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^2$ de degré inférieur ou égal à 3
2. Calculer $k(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^3$ de degré inférieur ou égal à 3
3. Calculer $m(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^4$ de degré inférieur ou égal à 3
4. Calculer ensuite $P(x) = 1 - g(x) + h(x) - k(x)$

NB : Si vous avez une calculatrice graphique, tracer le graphe de la fonction P et celui de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1+x)}$ sur $[-a, a]$ avec a proche de 0

Que constatez-vous ? Nous verrons en cours d'année comment trouver $P(x)$...

6 Calculer des dérivées

On rappelle les formules de dérivations :

- Si u et w sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si a et b sont des constantes réelles alors $au + bw$ et uw sont dérivables sur I avec

$$(au + bw)' = a u' + b w' \quad \text{et} \quad (uw)' = u' w + u w'$$

- Si u et w sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si w ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{w}$ et $\frac{u}{w}$ sont dérivables sur I avec

$$\left(\frac{1}{w}\right)' = \frac{-w'}{w^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u' w - u w'}{w^2}$$

- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) \in I_2$ et si w est dérivable sur l'intervalle I_2 alors $w \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I_1 avec :

$$\forall x \in I_1, (w \circ u)'(x) = u'(x) \times w'(u(x)) \quad \text{donc} \quad (w \circ u)' = u' \times w' \circ u$$

- **Cas particuliers importants :**

- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors u^n est dérivable sur I_1 et : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.
Reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}^*$ si u ne s'annule pas sur I_1 .

- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) > 0$ alors $\ln(u)$ est dérivable sur I_1 et :
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) \neq 0$ alors $\ln(|u|)$ est dérivable sur I_1 et :
$$(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$$
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I_1 et :
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , alors $\exp u$, $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I_1 avec :

$$(\exp u)' = u' \times \exp(u), \quad (\cos u)' = -u' \times \sin u, \quad (\sin u)' = u' \times \cos u$$

EXERCICE 6.1 : Calculer $g'(x)$ dans les cas suivants . On précisera sur quel ensemble la fonction g est définie , puis dérivable d'après les résultats rappelés ci-dessus .

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ | 7. $g(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ | 14. $g(x) = \sin^4(x)$ |
| 2. $g(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}$ | 8. $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ | 15. $g(x) = \cos^4(3x+5)$ |
| 3. $g(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)}$ | 9. $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+1}}$ | 16. $g(x) = \exp(\cos(x))$ |
| 4. $g(x) = 1+x^2-2x^2 \ln x$ | 10. $g(x) = \cos(2x+3)$ | 17. $g(x) = \exp(\sqrt{x^2+1})$ |
| 5. $g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$ | 11. $g(x) = \sin(4x-5)$ | 18. $g(x) = \sqrt{\exp(x)+1}$ |
| 6. $g(x) = \frac{\ln x^2+3x-4 }{x-1}$ | 12. $g(x) = \cos(\ln x)$ | 19. $g(x) = \ln\left(\frac{\exp(x)+1}{\exp(x)+2}\right)$ |
| | 13. $g(x) = \cos^3(x)$ | 20. $g(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\exp(x)+1}\right)$ |

7 Trouver une primitive simple

- On rappelle qu'une **primitive** d'une fonction g sur un intervalle I est une fonction G , dérivable sur l'intervalle I et telle que : $G' = g$ sur I .
- Si G est une primitive de g sur I alors les primitives de g sur I sont les fonctions $G + c$ où c est une fonction constante.
- On rappelle qu'une fonction g continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle I et qu'alors, pour tout $a \in I$, $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est **LA primitive** de g sur I nulle en a .

EXERCICE 7.1 : Déterminer une primitive G de g sur des intervalles à préciser, dans les cas suivants :

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $g(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$ | 3. $g(x) = \frac{2}{x^2}$ |
| 2. $g(x) = \frac{2}{x}$ | 4. $g(x) = \frac{1}{x^3}$ |
| 5. $g(x) = \frac{1}{x^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ | |
| 6. $g(x) = (2x+1)(x^2+3x+1) + (x^2+x-3)(2x+3)$ (sans développer) | |

7. $g(x) = \frac{1}{x} \exp(x) + (\ln x) \exp(x)$
8. $g(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$
9. $g(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+8}$
10. $g(x) = \cos(ax+b)$
11. $g(x) = \sin(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$
12. $g(x) = (2x+1) \exp(x^2+x+5)$
13. $g(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$
14. $g(x) = (2x+3) \sqrt{x^2+3x+2}$
15. $g(x) = (x^2+2x+3) \sqrt{x^3+3x^2+9x+1}$ (on ne cherchera pas à trouver le domaine)
16. $g(x) = 2 \cos x \sin x$
17. $g(x) = 3 \cos x \sin^2 x$
18. $g(x) = \sin x \cos^4 x$

EXERCICE 7.2 : Même consigne que pour l'exercice précédent. Plus difficile (on se servira du paragraphe "décomposer une fraction").

1. $g(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$
2. $g(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x^2+1)(x-1)^2}$
(Trouver a, b, c, d tels que $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$)
3. $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 + 14x^3 + 12x + 16}{x^2(x^2+4)}$
(Trouver a, b, c, d, e tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{ex}{x^2+4}$)

8 Le raisonnement par récurrence

On rappelle les quatre étapes d'un raisonnement par récurrence

- i) Énoncer clairement la propriété : Pour $n \in \mathbb{D}$, on note $\text{HR}(n)$ la proposition définie par " ".
- ii) Initialisation : vérifier que la proposition $\text{HR}(n_0)$ est vraie où n_0 est le plus petit élément de la partie $\mathbb{D}$ de $\mathbb{N}$.
- iii) Hérédité : Soit $n \in D$. On suppose que $\text{HR}(n)$ est vraie. On démontre ensuite que $\text{HR}(n+1)$ est vraie.
- iv) Conclure : Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que : pour tout $n \in D$, $\text{HR}(n)$ est vraie. C'est-à-dire que :

Pour tout $n \in D$, énoncez et encadrez ici la propriété démontrée

Un exemple : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

SOLUTION :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\text{HR}(n)$ la proposition définie par " $u_n = 2^n - 1$ ".
- Pour $n = 0$, on a : $2^0 - 1 = 0 = u_0$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie.
On a alors : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$ d'après $\text{HR}(n)$.
dont : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ donc $\text{HR}(n+1)$ est vraie.
- On a donc établi par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

Les exercices suivant nécessitent des récurrences

EXERCICE 8.1 : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{-4}{5}u_n + 18$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n \leq 15$ (la suite est donc bornée)
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0$

EXERCICE 8.2 : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer par un calcul direct que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n}$ et en déduire que la suite est monotone.

EXERCICE 8.3 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$

EXERCICE 8.4 :

1. On pose , pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = 0 + 1 + 4 + \dots + (n-1)^2 + n^2$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, V_n = \sum_{k=0}^n k^3 = 0 + 1 + 9 + \dots + (n-1)^3 + n^3$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, Z_n = \sum_{k=0}^n (2k+1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = (n+1)^2$ (d'abord sans utiliser 1., puis en déduisant de 1.)