

Objectif SUP 2024 – Correction

1 Calculs sur les Fractions

EXERCICE 1.1 : Simplifier les fractions suivantes où a, b, c et d désignent des réels non nuls.

$$F_1 = \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}} \quad , \quad F_2 = \frac{\frac{a}{b}}{c} \quad (\text{remarquer l'importance de bien écrire})$$

$$F_3 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{d}} \quad , \quad F_4 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{a}} \quad , \quad F_5 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{c}} \quad , \quad F_6 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{c}{d}}$$

$$\textbf{SOLUTION 1.1 : } F_1 = \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}} = \frac{ac}{b} \quad , \quad F_2 = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad , \quad F_3 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c}$$

$$F_4 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad F_5 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b^2} \quad , \quad F_6 = \frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

EXERCICE 1.2 : Simplifier les fractions suivantes sans effectuer de produit.

$$A = \frac{56 \times 24}{49 \times 64} \quad B = \frac{72 \times 35}{45 \times 56} \quad C = \frac{63 \times 21}{36 \times 49}$$

$$\textbf{SOLUTION 1.2 : } A = \frac{56 \times 24}{49 \times 64} = \frac{7 \times 8 \times 8 \times 3}{7 \times 7 \times 8 \times 8} = \frac{3}{7} \quad B = \frac{72 \times 35}{45 \times 56} = \frac{9 \times 8 \times 5 \times 7}{5 \times 9 \times 7 \times 8} = 1$$

$$C = \frac{63 \times 21}{36 \times 49} = \frac{9 \times 7 \times 7 \times 3}{9 \times 4 \times 7 \times 7} = \frac{3}{4}$$

EXERCICE 1.3 : Calculer les quantités suivantes sans utiliser de calculatrice !

$$D = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \quad , \quad E = \frac{1}{21} + \frac{3}{14} - \frac{2}{3} \quad , \quad F = A + B - C$$

$$\textbf{SOLUTION 1.3 : } D = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{1}{12} - \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{1}{6} \quad , \quad E = \frac{1}{21} + \frac{3}{14} - \frac{2}{3} = \frac{2}{42} + \frac{9}{42} - \frac{28}{42} = -\frac{17}{42},$$

$$F = A + B - C = \frac{3}{7} + 1 - \frac{3}{4} = \frac{12 + 28 - 21}{28} = \frac{19}{28}.$$

EXERCICE 1.4 : Simplifier les fractions suivantes où n désigne un entier naturel.

On donne $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ avec la convention $0! = 1$

$$\text{et } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$1. \quad G_1 = \frac{n!}{(n-1)!} \quad , \quad G_2 = \frac{n!}{(n-2)!} \quad , \quad G_3 = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \quad , \quad G_4 = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

2. Donner une expression simple de :

$$\binom{n}{k} \text{ pour } k = 0, k = 1, k = 2, \text{ puis } k = n, k = n-1 \text{ et } k = n-2.$$

Conjecturer une formule et la démontrer.

SOLUTION 1.4 :

$$1. G_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n, G_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1), G_3 = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1},$$

$$G_4 = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$2. \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

On conjecture que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$$\text{Pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ on a : } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \times (n-(n-k))!} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

EXERCICE 1.5 : Simplifier $f(x)$ où x désigne un réel. On précisera le domaine de définition de f .

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2. f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 7x + 12)}{(x^2 - 4x + 3)(x-5)}$$

$$3. f(x) = \frac{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2x - 15)}$$

$$4. f(x) = \frac{(x^2 - 16)(x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x - 3)}$$

SOLUTION 1.5 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe si et seulement si, $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 2$ et $x \neq 3$.

$$\text{On a donc : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \text{ et, pour } x \in \mathcal{D}_f, \text{ on a : } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe si et seulement si, $(x^2 - 5x + 6)(x-5) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 3$ et $x \neq 5$.

On a donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3, 5\}$ et, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 7x + 12)}{(x^2 - 4x + 3)(x-5)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x-5)} = \frac{x-4}{x-5}.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe si et seulement si, $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2x - 15) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq -2$ et $x \neq 4$ et $x \neq -5$ et $x \neq 3$.

On a donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 3, 4\}$ et, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = \frac{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 2x - 15)} = \frac{(x-2)(x-4)(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-4)(x+5)(x-3)} = \frac{x-2}{x+5}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe si et seulement si, $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x - 3) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 4$ et $x \neq -1$ et $x \neq 3$ et $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

On a donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3, 4\}$ et, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = \frac{(x^2 - 16)(x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x - 3)} = \frac{(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)(x+1)(x-3)(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{x+4}{x-1}$$

2 Calculs sur les Puissances

EXERCICE 2.1 : Simplifier les écritures suivantes où a, b, c, d désignent des réels non nuls et n, p, q des entiers relatifs

$$(a^n)(a^p) \quad , \quad (a^n)^p \quad , \quad (a^{n+p})^q \quad , \quad (a^p)^p \quad , \quad (a^p)(a^p) \quad , \quad (a^2)^p \quad ,$$

$$(a^n \times b^p)^q \quad , \quad (a^n)^p \times (b^p)^n \quad , \quad \frac{(a^n)^p \times b^n}{(a^p)^q \times b^{n+p}} \quad , \quad \frac{(a^n b)^p \times (c^n a)^q}{(a^p c)^q \times (b^n c^q)^p}$$

SOLUTION 2.1 :

$$(a^n)(a^p) = a^{n+p}, (a^n)^p = a^{np}, (a^{n+p})^q = a^{q(n+p)}, (a^p)^p = a^{p^2} = a^{p^2}, (a^p)(a^p) = a^{2p}, (a^2)^p = a^{2p},$$

$$(a^n \times b^p)^q = a^{nq} \times b^{pq}, (a^n)^p \times (b^p)^n = (ab)^{np}, \frac{(a^n)^p \times b^n}{(a^p)^q \times b^{n+p}} = \frac{a^{p(n-q)}}{b^p},$$

$$\frac{(a^n b)^p \times (c^n a)^q}{(a^p c)^q \times (b^n c^q)^p} = a^{np+q-pq} \times b^{p-np} \times c^{nq-qp-q}.$$

EXERCICE 2.2 : Vrai ou faux

1. a) $2^n + 4^n = 6^n$ b) $2^n + 4^n = 8^n$ c) $2^n + 4^n = 2^n(1 + 2^n)$
2. a) $2^n + 3^n + 6^n = 2 \times 6^n$ b) $2^n + 3^n + 6^n = (2^n + 1)(3^n + 1) - 1$
3. a) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{12^n}$ b) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$ c) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{8^n}$

On rappelle que : pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$)

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (racine carrée de x est l'unique réel y tel que $y^2 = x$)
- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (racine n-ième de x est l'unique réel y tel que $y^n = x$)

SOLUTION 2.2 :

1. a) $2^n + 4^n = 6^n$ **FAUX**
 b) $2^n + 4^n = 8^n$ **FAUX**
 c) $2^n + 4^n = 2^n(1 + 2^n)$ **VRAI**
2. a) $2^n + 3^n + 6^n = 2 \times 6^n$ **FAUX**
 b) $2^n + 3^n + 6^n = (2^n + 1)(3^n + 1) - 1$ **VRAI**
3. a) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{12^n}$ **FAUX** (sauf si $n = 0$)
 b) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$ **VRAI**
 c) $\frac{2^n + 4^n}{2^n + 6^n} = \frac{6^n}{8^n}$ **FAUX** (sauf si $n = 0$)

EXERCICE 2.3 : Simplifier les écritures suivantes où a, b désignent des réels strictement positifs et n, p, q des entiers naturels non nuls

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q, \quad \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{n}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{n}}, \quad (a^{2n})^{\frac{1}{2}}, \quad (ab)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{q}}}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)\left(b^{\frac{1}{q}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)}$$

SOLUTION 2.3 : $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^q = a^{\frac{q}{p}}$, $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{qp}}$, $(a^{2n})^{\frac{1}{n}} = a^2$, $(a^{2n})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{2n}{n}}$, $(a^{2n})^{\frac{1}{2}} = a^{2^{n-1}}$,

$$(ab)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{q}}} = a^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)\left(b^{\frac{1}{q}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)} = a^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \times b^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \quad \frac{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)\left(b^{\frac{1}{p}}\right)} = a^{\left(\frac{1}{pq} - \frac{1}{q}\right)} \times b^{\left(\frac{1}{pq} - \frac{1}{p}\right)}$$

EXERCICE 2.4 : Simplifier les écritures suivantes où a, b désignent des réels strictement positifs.

$$\sqrt{\sqrt{a^8}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{a^2}}, \quad \sqrt[5]{\sqrt{a^{30}}}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{pn}}}, \quad \sqrt[4]{\sqrt{a^{10}} \times \sqrt[3]{b^{12}}}, \quad \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{30}}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{(ab)^{15}}}},$$

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{30}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{30}}}}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{(ab)^{30}}}}, \quad \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}\right)^{12}, \quad \left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{10}}\right)^9$$

SOLUTION 2.4 :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{a^8}} &= a^2, & \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{30}}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{(ab)^{15}}}} &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}, \\ \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} &= \sqrt[3]{a}, & \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}\right)^{12} &= a^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{a^8}, \\ \sqrt[5]{\sqrt{a^{30}}} &= a^3, & \left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{10}}\right)^9 &= a^{12}, \\ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{pn}}} &= a, \\ \sqrt[4]{\sqrt{a^{10}} \times \sqrt[3]{b^{12}}} &= b\sqrt[4]{a^5}, \end{aligned}$$

EXERCICE 2.5 : Vrai ou faux

1. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$
2. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a^2}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}} = a^p$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[pn]{a^q}$
6. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{pq}}$
7. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}}$
8. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = (\sqrt[n]{a})^{pq}$
9. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{ab}}$
10. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{(ab)^2}}$
11. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[p]{ab}$
12. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[p]{a^n b^p}$

SOLUTION 2.5 :

1. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$ **VRAI** (égaux à $a^{\frac{1}{np}}$)
2. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a^2}$ **FAUX**
3. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}} = a^p$ **FAUX**
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} = \sqrt[n]{a}$ **VRAI**
5. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[pn]{a^q}$ **VRAI**
6. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{pq}}$ **FAUX**
7. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}}$ **VRAI**
8. $\sqrt[n]{a^p} \sqrt[n]{a^q} = (\sqrt[n]{a})^{pq}$ **FAUX**
9. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{ab}}$ **VRAI**
10. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{(ab)^2}}$ **FAUX**
11. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[p]{ab}$ **FAUX**
12. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^p}} \sqrt[p]{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[p]{a^n b^p}$ **FAUX**

3 Calculs sur les fractions et les racines

Si a et b sont des réels strictement positifs, on appelle quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ le réel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (et réciproquement).

EXERCICE 3.1 : Simplifier les fractions suivantes de sorte que le dénominateur ne présente plus de $\sqrt{}$:

$$1. (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$3. \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$4. A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$$

$$5. B = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$6. C = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$7. \text{ Plus difficile : } D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

SOLUTION 3.1 : Simplifier les fractions suivantes de sorte que le dénominateur ne présente plus de $\sqrt{}$:

$$1. (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$3. \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a - b} = \frac{a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{a - b}$$

$$4. A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{3 - 6} = \frac{-\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{30}}{3}$$

$$5. B = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{6}) + (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{6})}{(\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{6})} = \frac{-2\sqrt{6} + 2\sqrt{30}}{3}$$

$$6. C = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{3 - 6} + \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2}$$

$$= \frac{-\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{30} + \sqrt{15} + \sqrt{6} + \sqrt{30} + 2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{15} + 2\sqrt{30}}{3}$$

$$7. D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}{2\sqrt{6}} = \frac{5 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{15} + 3\sqrt{10}}{6}$$

4 Développements - Factorisations : identités remarquables

EXERCICE 4.1 : Soient a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que :

$$(a) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(b) (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(c) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(d) a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$(e) a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

2. Développer :

(a) $(a - b)^3$

(b) $(a - b)^4$

(c) $(a + b)^5$

(d) $(a - b)^5$

3. Factoriser :

(a) $a^3 + b^3$

(b) $a^5 + b^5$

SOLUTION 4.1 :

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ il suffit de développer $(a + b)(a + b)^2$
 - $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ il suffit de développer $(a + b)^2(a + b)^2$
 - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (développer le membre de droite)
 - $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$ (développer le membre de droite)
 - $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ (développer le membre de droite)
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 - $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
 - $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
 - $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 - $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

5 Produits de Polynômes

Un exemple pour calculer rapidement un produit de deux polynômes :Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{r} \text{On a : } P(x)Q(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 \\ \quad + \quad 2x^4 - 8x^3 + 10x^2 \\ \quad \quad - x^3 + 4x^2 - 5x \\ \quad \quad \quad + 3x^2 - 12x + 15 \end{array}$$

$$\text{donc } P(x)Q(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 17x + 15$$

Cette disposition permet d'accéder rapidement aux termes de mêmes degrés

On peut aussi disposer en commençant par les termes de plus petit degré

Pour cela on écrit : $P(x)Q(x) = (3 - x + 2x^2 + x^3)(5 - 4x + x^2)$

NB : Si vous êtes très à l'aise, vous pouvez écrire :

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (x^3 + 2x^2 - x + 3) \\ &\quad \times (x^2 - 4x + 5) \\ &= x^5 + (1 \times (-4) + 2 \times 1)x^4 + (1 \times 5 + 2 \times (-4) + (-1) \times 1)x^3 \\ &\quad + (2 \times 5 + (-1) \times (-4) + 3 \times 1)x^2 + ((-1) \times 5 + 3 \times (-4))x + 3 \times 5 \end{aligned}$$

Pour remplir la parenthèse devant x^4 :on part du terme en x^3 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^1 dans $Q(x)$ puis on passe au terme en x^2 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^2 dans $Q(x)$ puis on passe au terme en x^1 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^3 dans $Q(x)$ puis on passe au terme en x^0 dans $P(x)$ et on cherche le terme en x^4 dans $Q(x)$ **EXERCICE 5.1 :** Développer les produits suivants :

- $g_1(x) = (2x^3 - 3x + 1)(x^4 + 2x^2 - 4x + 1)$
- $g_2(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(x^3 - 2x + 2)$
- $g_3(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 + x - 1)(x^3 + 2x^2 - 1)$
- $g_4(x) = (x^3 + x + 1)(x^4 - 2x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$

SOLUTION 5.1 :

1. $g_1(x) = (2x^3 - 3x + 1)(x^4 + 2x^2 - 4x + 1) = 2x^7 + x^5 - 7x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 7x + 1$
2. $g_2(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(x^3 - 2x + 2) = x^7 + x^6 - 4x^5 + 7x^3 - 4x^2 - 2x + 2$
3. $g_3(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 + x - 1)(x^3 + 2x^2 - 1) = x^8 - x^6 + 2x^5 + 3x^3 - x^2 - 4x + 2$
4. $g_4(x) = (x^3 + x + 1)(x^4 - 2x^2 - 2)(x^2 + x - 1) = x^9 + x^8 - 2x^7 - 2x^5 - 7x^4 - 2x^2 + 2$

EXERCICE 5.2 : On pose $g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

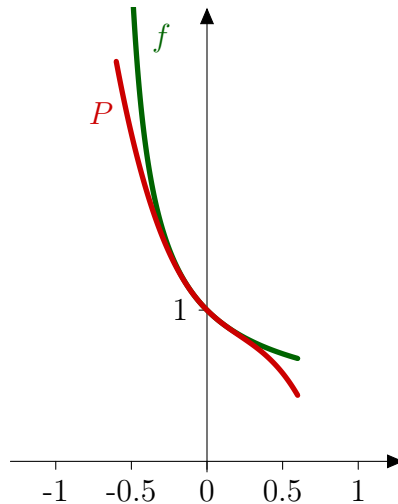
1. Calculer $h(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^2$ de degré inférieur ou égal à 3
2. Calculer $k(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^3$ de degré inférieur ou égal à 3
3. Calculer $m(x)$ qui est formée des termes de $(g(x))^4$ de degré inférieur ou égal à 3
4. Calculer ensuite $P(x) = 1 - g(x) + h(x) - k(x)$

NB : Si vous avez une calculatrice graphique, tracer le graphe de la fonction P et celui de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1+x)}$ sur $[-a, a]$ avec a proche de 0

Que constatez-vous ? Nous verrons en cours d'année comment trouver $P(x)$...

SOLUTION 5.2 :

1. $(g(x))^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6$ donc $h(x) = x^2 - x^3$
2. $(g(x))^3 = \left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5 - \frac{9}{8}x^6 + \frac{7}{12}x^7 - \frac{1}{6}x^8 + \frac{1}{27}x^9$ donc $k(x) = x^3$
3. $(g(x))^4 = \left(x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5 - \frac{9}{8}x^6 + \frac{7}{12}x^7 - \frac{1}{6}x^8 + \frac{1}{27}x^9\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$ donc $m(x) = 0$
4. $P(x) = 1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + (x^2 - x^3) - (x^3) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3$



Les courbes représentatives de P et de f sont "très proches l'une de l'autre" (dans un certain sens à préciser) au point d'abscisse 0.

On verra que $\frac{1}{1 + \ln(1+x)} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$ où $o(x^3) = x^3u(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$.

6 Calculer des dérivées

On rappelle les formules de dérivations :

- Si u et w sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si a et b sont des constantes réelles alors $au + bw$ et uw sont dérivables sur I avec

$$(au + bw)' = a u' + b w' \quad \text{et} \quad (uw)' = u' w + u w'$$

- Si u et w sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si w ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{w}$ et $\frac{u}{w}$ sont dérivables sur I avec

$$\left(\frac{1}{w}\right)' = \frac{-w'}{w^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u' w - u w'}{w^2}$$

- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) \in I_2$ et si w est dérivable sur l'intervalle I_2 alors $w \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I_1 avec :

$$\forall x \in I_1, (w \circ u)'(x) = u'(x) \times w'(u(x)) \quad \text{donc} \quad (w \circ u)' = u' \times w' \circ u$$

- **Cas particuliers importants :**

- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors u^n est dérivable sur I_1 et : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
Reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}^*$ si u ne s'annule pas sur I_1 .
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) > 0$ alors $\ln(u)$ est dérivable sur I_1
et : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) \neq 0$ alors $\ln(|u|)$ est dérivable sur I_1
et : $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , si pour tout $x \in I_1$, $u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I_1 et :
 $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si u est dérivable sur un intervalle I_1 , alors $\exp u$, $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I_1 avec :

$$(\exp u)' = u' \times \exp(u), \quad (\cos u)' = -u' \times \sin u, \quad (\sin u)' = u' \times \cos u$$

EXERCICE 6.1 : Calculer $g'(x)$ dans les cas suivants . On précisera sur quel ensemble la fonction g est définie , puis dérivable d'après les résultats rappelés ci-dessus .

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ | 7. $g(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ | 14. $g(x) = \sin^4(x)$ |
| 2. $g(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}$ | 8. $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ | 15. $g(x) = \cos^4(3x+5)$ |
| 3. $g(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)}$ | 9. $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+1}}$ | 16. $g(x) = \exp(\cos(x))$ |
| 4. $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ | 10. $g(x) = \cos(2x+3)$ | 17. $g(x) = \exp(\sqrt{x^2+1})$ |
| 5. $g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$ | 11. $g(x) = \sin(4x-5)$ | 18. $g(x) = \sqrt{\exp(x)+1}$ |
| 6. $g(x) = \frac{\ln x^2+3x-4 }{x-1}$ | 12. $g(x) = \cos(\ln x)$ | 19. $g(x) = \ln\left(\frac{\exp(x)+1}{\exp(x)+2}\right)$ |
| | 13. $g(x) = \cos^3(x)$ | 20. $g(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\exp(x)+1}\right)$ |

SOLUTION 6.1 :

1. $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$.

2. $g(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

3. $g(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

4. $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -4x \ln x$.

5. $g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{x - x \ln x + 1}{x(x+1)^2}$.

6. $g(x) = \frac{\ln|x^2+3x-4|}{x-1}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{-4 \ln|x^2+3x-4| + 2x - x \ln|x^2+3x-4| + 3}{(x-1)^2(x+4)}$.

7. $g(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$. g est définie sur $] -\infty, 2] \cup [2, +\infty[$ et dérivable sur $D =] -\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$.

8. $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. g est définie sur $] -\infty, -1] \cup]1, +\infty[$ et dérivable sur $D =] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$.

9. $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+1}}$. g est définie sur $] -\infty, -1]$ et dérivable sur $D =] -1, +\infty[$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}-1)^2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}}$.

10. $g(x) = \cos(2x+3)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -2 \sin(2x+3)$.

11. $g(x) = \sin(4x-5)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = 4 \cos(4x-5)$.

12. $g(x) = \cos(\ln x)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)$.

13. $g(x) = \cos^3(x)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -3 \cos^2 x \sin x$

14. $g(x) = \sin^4(x)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = 4 \cos x \sin^3(x)$.

15. $g(x) = \cos^4(3x + 5)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -12 \sin(3x + 5) \cos^3(3x + 5)$.

16. $g(x) = \exp(\cos(x))$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -(\sin x) e^{\cos x}$.

17. $g(x) = \exp(\sqrt{x^2 + 1})$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{\sqrt{x^2 + 1}}$

18. $g(x) = \sqrt{\exp(x) + 1}$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$.

19. $g(x) = \ln\left(\frac{\exp(x) + 1}{\exp(x) + 2}\right)$. g est définie et dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 2)(e^x + 1)}$.

20. $g(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\exp(x) + 1}\right)$. g est définie et dérivable sur $D =]-1, +\infty[$

On a : $\forall x \in D, g'(x) = -\frac{e^x + 2xe^x - 1}{2(e^x + 1)(x + 1)}$.

7 Trouver une primitive simple

- On rappelle qu'une **primitive** d'une fonction g sur un intervalle I est une fonction G , dérivable sur l'intervalle I et telle que : $G' = g$ sur I .
- Si G est une primitive de g sur I alors les primitives de g sur I sont les fonctions $G + c$ où c est une fonction constante.
- On rappelle qu'une fonction g continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle I et qu'alors, pour tout $a \in I$, $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est **LA primitive** de g sur I nulle en a .

EXERCICE 7.1 : Déterminer une primitive G de g sur des intervalles à préciser, dans les cas suivants :

1. $g(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$

3. $g(x) = \frac{2}{x^2}$

2. $g(x) = \frac{2}{x}$

4. $g(x) = \frac{1}{x^3}$

5. $g(x) = \frac{1}{x^n}$, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

6. $g(x) = (2x + 1)(x^2 + 3x + 1) + (x^2 + x - 3)(2x + 3)$ (sans développer)

7. $g(x) = \frac{1}{x} \exp(x) + (\ln x) \exp(x)$
8. $g(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$
9. $g(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+8}$
10. $g(x) = \cos(ax+b)$
11. $g(x) = \sin(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$
12. $g(x) = (2x+1) \exp(x^2+x+5)$
13. $g(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$
14. $g(x) = (2x+3) \sqrt{x^2+3x+2}$
15. $g(x) = (x^2+2x+3) \sqrt{x^3+3x^2+9x+1}$ (on ne cherchera pas à trouver le domaine)
16. $g(x) = 2 \cos x \sin x$
17. $g(x) = 3 \cos x \sin^2 x$
18. $g(x) = \sin x \cos^4 x$

SOLUTION 7.1 :

$$1. g(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 4$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - 4x.$$

$$2. g(x) = \frac{2}{x}$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou sur } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = 2 \ln |x|.$$

$$3. g(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou sur } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = \frac{-2}{x}.$$

$$4. g(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou sur } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = \frac{-1}{2x^2}.$$

$$5. g(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou sur } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

$$6. g(x) = (2x+1)(x^2+3x+1) + (x^2+x-3)(2x+3) \text{ (sans développer)}$$

$$= \left(\frac{d}{dx}(x^2+x-3)\right)(x^2+3x+1) + (x^2+x-3)\left(\frac{d}{dx}(x^2+3x+1)\right)$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = (x^2+x-3)(x^2+3x+1)$$

$$7. g(x) = \frac{1}{x} \exp(x) + (\ln x) \exp(x)$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*}, G(x) = \ln x \cdot \exp(x).$$

$$8. g(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2}{x+1}.$$

$$\text{Sur } D =]-\infty, -1[\text{ ou } D =]-1, +\infty[, G(x) = 2 \ln |x+1|.$$

$$9. g(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx}(x^2+6x+8) \text{ avec } x^2+6x+8 = (x+4)(x+2).$$

$$\text{Sur } D =]-\infty, -4[\text{ ou } D =]-4, -2[\text{ ou } D =]-2, +\infty[, G(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2+6x+8|.$$

$$10. g(x) = \cos(ax+b) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b).$$

11. $g(x) = \sin(ax + b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \frac{-1}{a} \cos(ax + b)$$

12. $g(x) = (2x + 1) \exp(x^2 + x + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + x + 5) \times \exp(x^2 + x + 5)$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \exp(x^2 + x + 5).$$

13. $g(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x}\right).$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou sur } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right).$$

14. $g(x) = (2x + 3) \sqrt{x^2 + 3x + 2} = u'(x) \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1).$

$$\text{Sur } D =]-\infty, -2[\text{ ou } D =]-1, +\infty[, G(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 3x + 2)^{3/2}.$$

15. $g(x) = (x^2 + 2x + 3) \sqrt{x^3 + 3x^2 + 9x + 1} = \frac{1}{3} u'(x) \sqrt{u(x)}.$

Pour x tel que $x^3 + 3x^2 + 9x + 1 > 0$, on a : $G(x) = \frac{2}{9}(x^3 + 3x^2 + 9x + 1)^{3/2}.$

16. $g(x) = 2 \cos x \sin x.$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \sin^2 x \text{ ou } G(x) = -\cos^2 x.$$

17. $g(x) = 3 \cos x \sin^2 x$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \sin^3 x.$$

18. $g(x) = \sin x \cos^4 x$

$$\text{Sur } D = \mathbb{R}, G(x) = \frac{-1}{5} \cos^5 x.$$

EXERCICE 7.2 : Même consigne que pour l'exercice précédent. Plus difficile (on se servira du paragraphe "décomposer une fraction").

1. $g(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$

2. $g(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + 1)(x-1)^2}$

(Trouver a, b, c, d tels que $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$)

3. $g(x) = \frac{2x^5 - x^4 + 14x^3 + 12x + 16}{x^2(x^2 + 4)}$

(Trouver a, b, c, d, e tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{ex}{x^2 + 4}$)

SOLUTION 7.2 :

1. $g(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x}.$

$$\text{Sur } D =]-\infty, 0[\text{ ou } D =]0, 1[\text{ ou } D =]1, 2[\text{ ou } D =]2, +\infty[,$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln|x-2| - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x|$$

$$2. \quad g(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Sur } D =]-\infty, 1[\text{ ou } D =]1, +\infty[, G(x) = \ln|x^2 + 1| + \ln|x - 1| + \frac{-2}{x - 1}}.$$

$$3. \quad g(x) = \frac{2x^5 - x^4 + 14x^3 + 12x + 16}{x^2(x^2 + 4)} = 2x - 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} + 3\frac{x}{x^2 + 4}.$$

$$\boxed{\text{Sur } D = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou } D = \mathbb{R}^{-*}, G(x) = x^2 - x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + \frac{3}{2}\ln(x^2 + 4)}.$$

8 Le raisonnement par récurrence

On rappelle les quatre étapes d'un raisonnement par récurrence

- Enoncer clairement la propriété : Pour $n \in \mathbb{D}$, on considère la proposition $\text{HR}(n)$ définie par " ".
- Initialisation : vérifier que la proposition $\text{HR}(n_0)$ est vraie où n_0 est le plus petit élément de la partie $\mathbb{D}$ de $\mathbb{N}$.
- Hérédité : Soit $n \in D$. On suppose que $\text{HR}(n)$ est vraie. On démontre ensuite que $\text{HR}(n + 1)$ est vraie.
- Conclure : Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que : pour tout $n \in D$, $\text{HR}(n)$ est vraie. C'est-à-dire que :

Pour tout $n \in D$, énoncez et encadrez ici la propriété démontrée

Un exemple : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

SOLUTION :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\text{HR}(n)$ définie par " $u_n = 2^n - 1$ ".
- Pour $n = 0$, on a : $2^0 - 1 = 0 = u_0$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie.
On a alors : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$ d'après $\text{HR}(n)$
dont : $u_{n+1} = 2^{n+1}u_n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ donc $\text{HR}(n + 1)$ est vraie
- On a donc établi par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1}$.

Les exercices suivant nécessitent des récurrences

EXERCICE 8.1 : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{-4}{5}u_n + 18$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n \leq 15$ (la suite est donc bornée).
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0$.

SOLUTION 8.1 :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n)$: " $4 \leq u_n \leq 15$ "
 - On a : $4 \leq u_0 \leq 15$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :
 $u_{n+1} = \frac{-4}{5}u_n + 18$ avec $-15 \leq -u_n \leq -4$ donc $-12 \leq \frac{4}{5}(-u_n) \leq \frac{-16}{5}$
donc $6 \leq \frac{4}{5}(-u_n) \leq \frac{-16}{5} + 18 = \frac{74}{5}$ donc $4 \leq u_{n+1} \leq 15$ soit $\text{HR}(n + 1)$.
Par récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n \leq 15}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n) : "(u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0"$.

○ On a, pour $n = 0$, $u_n = 4$ et $u_{n+1} = \frac{-16}{5} + 18 = \frac{74}{5}$,

donc $(u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie

○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$(u_{n+2} - u_{n+1})(-1)^{n+1} = \left(\frac{-4}{5}u_{n+1} - \frac{-4}{5}u_n \right)(-1)^{n+1} = \frac{4}{5}(u_{n+1} - u_n)(-1)^n$$

donc $(u_{n+2} - u_{n+1})(-1)^{n+1} > 0$ soit $\text{HR}(n+1)$.

Par récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0}$.

NB : Démonstration directe

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{-4}{5}u_{n+1} - \frac{-4}{5}u_n = \frac{-4}{5}(u_{n+1} - u_n)$$

donc la suite de terme général $a_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{-4}{5}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-4}{5} \right)^n \left(\frac{74}{5} - 4 \right) = (-1)^n \times \frac{4^n}{5^n} \times \frac{54}{5}$$

donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - u_n)(-1)^n > 0}$.

EXERCICE 8.2 : Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.

2. Montrer par un calcul direct que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n}$ et en déduire que la suite est monotone.

SOLUTION 8.2 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n) : "0 \leq u_n < 3"$ (mieux que ce qui est demandé - ce n'est pas indispensable)!

○ On a, pour $n = 0$, $0 \leq u_0 < 3$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.

○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$6 \leq 6 + u_n < 9 \text{ donc } 0 \leq \sqrt{6 + u_n} < 3 \text{ soit } 0 \leq u_{n+1} < 3 \text{ soit } \text{HR}(n+1).$$

Par récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 3}$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{6 + u_n} - u_n)(\sqrt{6 + u_n} + u_n)}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} \text{ car } \sqrt{6 + u_n} + u_n > 0$$

$$\text{donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n}}.$$

Monotonie de la suite :

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{6 + u_n} + u_n > 0 \text{ et } 6 + u_n - u_n^2 = (u_n + 2)(3 - u_n)$$

$$\text{Comme } 0 \leq u_n < 3, \text{ on a : } 6 + u_n - u_n^2 > 0.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc $\boxed{\text{la suite est strictement croissante}}$.

EXERCICE 8.3 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$

SOLUTION 8.3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n) : "5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}"$.

○ On a, pour $n = 0$, $4^{n+2} + 3^{n+2} = 4^2 + 3^2 = 25$ et $5^{n+2} = 25$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.

○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} 5^{n+3} &= 5 \times 5^{n+2} \geq 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) \quad \text{d'après } \text{HR}(n) \\ &\geq 4 \times 4^{n+2} + 3 \times 3^{n+2} \quad \text{soit } \text{HR}(n+1). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}}$.

EXERCICE 8.4 :

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = 0 + 1 + 4 + \dots + (n-1)^2 + n^2$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^n k^3 = 0 + 1 + 9 + \dots + (n-1)^3 + n^3$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \sum_{k=0}^n (2k+1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = (n+1)^2$ (d'abord sans utiliser 1., puis en déduisant de 1.)

SOLUTION 8.4 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n)$: " $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ".
 - On a, pour $n = 0$, $S_0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{d'après } \text{HR}(n)$$

$$= (n+1) \left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{soit } \text{HR}(n+1).$$

Par récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n)$: " $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".
 - On a, pour $n = 0$, $T_0 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après } \text{HR}(n)$$

$$= \frac{(n+1)}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6)$$

$$= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) \quad \text{soit } \text{HR}(n+1)$$

Par récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $\text{HR}(n)$: " $V_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ".
 - On a, pour $n = 0$, $V_0 = 0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2$ donc $\text{HR}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\text{HR}(n)$ est vraie. On a alors :

$$V_{n+1} = V_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4(n+1)]$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \quad \text{soit } HR(n+1)$$

Par récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

4. Sans utiliser 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $HR(n) : "Z_n = (n+1)^2"$.

◦ On a, pour $n = 0$, $Z_0 = 1 = (n+1)^2$ donc $HR(0)$ est vraie.

◦ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $HR(n)$ est vraie. On a alors :

$$Z_{n+1} = Z_n + (2n+3) = (n+1)^2 + 2n+3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \quad \text{soit } HR(n+1)$$

Par récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

En utilisant 1.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } Z_n &= \sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2S_n + (n+1). \\ &= n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2. \end{aligned}$$

On a donc montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.