Chapitre 1 : Éléments de logique et de calcul

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 Éléments de raisonnement

Définition. *Soient P et Q deux assertions.*
Si on vérifie $non(P)\, ou\, Q$ alors on dit que $\underline{P \text{ implique } Q}$ et on le note $P \Rightarrow Q$.
On note $P \Leftrightarrow Q$ lorsque on a $(P\, et\, Q)\, ou\, (non(P)\, et\, non(Q))$ et on dit alors $\underline{P \text{ et } Q \text{ sont équivalents}}$.

Proposition 1.1. *On dispose des principes de raisonnement suivants pour démontrer $P \Rightarrow Q$:*

Directement : On suppose P puis on démontre Q.
Par l'absurde : On suppose P et $non(Q)$ puis on aboutit à une contradiction.
Contraposée : On démontre $non(Q) \Rightarrow non(P)$.

Proposition 1.2. *On dispose des principes de raisonnement suivants pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$.*

Directement : On démontre par équivalences successives $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow Q$.
Double implication : On démontre séparément $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
Contraposée : On démontre $non(P) \Leftrightarrow non(Q)$.

Théorème 1.3 (Raisonnement par récurrence)**.** *Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Si on a :*

Initialisation : $P(0)$ est Vrai.
Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors le prédicat est toujours Vrai : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est Vrai.

2 Sommes et produits

Définition. *Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de valeurs numériques.*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la somme itérée $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ par :

$$S_0 = 0 \text{ et } S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.$$

Proposition 2.1. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $(u_k)_{k\geq 0}, (v_k)_{k\geq 0}$ des suites numériques.*
On dispose des règles suivantes de calcul :

a) $\sum_{k=1}^{n}(au_k + bv_k) = a\sum_{k=1}^{n} u_k + b\sum_{k=1}^{n} v_k$.
b) $\sum_{k=1}^{n_1} u_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_k = \sum_{k=1}^{n_2} u_k$.
c) $\left(\sum_{k=1}^{n_1} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n_2} v_k\right) = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} u_{k_1}v_{k_2}$.
d) $\sum_{k=n_1}^{n_2}(u_{k+1} - u_k) = u_{n_2+1} - u_{n_1}$.

Proposition 2.2. *Les sommes des puissances des premiers entiers sont données par :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$\otimes$ On définit de manière analogue le produit itéré et on le note $\prod_{k=1}^{n} u_k$.
En particulier, le produit des premiers entiers s'appelle la factorielle : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
$\otimes$ On peut alors définir les coefficients binomiaux par : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ lorsque $0 \leq p \leq n$ et 0 sinon.
Ils vérifient les formules $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$, $\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Proposition 2.3. *Soient $x, y \in \mathbb{C}$. On dispose des formules de factorisations suivantes :*

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

⊗ On obtient en particulier la somme des termes d'une suite géométrique non constante ($q \neq 1$) :

$$\text{Pour des entiers } a \leq b, \sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q}.$$

3 Résolution de système

Définition. *Les opérations élémentaires du pivot de Gauss-Jordan sont :*
Transvection : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$.
Dilatation : $L_i \leftarrow \mu L_i$ avec $\mu \neq 0$.
Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$.

On dit qu'un système est échelonné si il est de la forme : $\begin{cases} p_1\, x + & \alpha\, y + & \beta\, z & = b_1 \\ & p_2\, y + & \gamma\, z & = b_2 \\ & & p_3\, z & = b_3 \end{cases}$ *avec des coefficients $p_k \neq 0$ appelés pivots du système.*

Théorème 3.1 (Algorithme du Pivot de Gauss-Jordan)**.** *Tout système est équivalent par ligne à un système échelonné.*

⊗ Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. On remonte le prochain pivot en haut du système à l'aide d'une Permutation.
2. On réduit le pivot à la valeur 1 à l'aide d'une Dilatation.
3. On annule tous les autres coefficients de la colonne à l'aide de Transvections.

Proposition 3.2. *Les solutions d'un système somme-produit* $\begin{cases} a+b & = S \\ ab & = P \end{cases}$ *sont les couples (a, b) de racines du polynôme $X^2 - SX + P$.*

4 Inégalités

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre totale notée par $\leq$:
Réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
Antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
Transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
Totale : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ ou $y \leq x$
De plus cette relation est compatible aux opérations : somme, produit et puissance.

Proposition 4.1. *Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto ax + b$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a \geq 0$ et décroissante sur $\mathbb{R}$ sinon.*

Pour $n \in \mathbb{R}^*$, l'application $f_n : x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $n \geq 0$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sinon.

⊗ La monotonie des fonctions permet de traduire simplement des transformations d'inégalités sur un **intervalle** I. On rappel que f est croissante sur I ssi $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Proposition 4.2. *La fonction valeur absolue* $x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, multiplicative* $|ab| = |a||b|$ *et vérifie l'inégalité triangulaire :*

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ et } \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k|$$

Définition. *Soit* A *une partie* $\mathbb{R}$*. On dit que* $m \in \mathbb{R}$ *est un majorant de* A *si* $\forall a \in A, a \leq m$*.*

Si il existe un majorant de A*, on dit que* A *est majorée.*

Si on dispose de $m \in A$ *qui est un majorant de* A *alors on dit que* m *est le maximum de* A*. Il est alors unique et on le note* $max(A)$*.*

⊗ On définit de manière analogue minorant, minorée et minimum d'une partie.

Définition. *La fonction partie entière* $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ *est définie par l'encadrement :* $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$*.*

Cette fonction est croissante et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$*.*

5 Trigonométrie

Proposition 5.1. *Soient* $\theta, a, b \in \mathbb{R}$*.*
Formule fondamentale :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Formule d'addition :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}. \end{aligned}$$

Formule d'arc double :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta, \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

Proposition 5.2. *Soient* $a, b, p, q \in \mathbb{R}$*.*
Formule de linéarisation :

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right), \\ \cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right). \end{aligned}$$

Formule de factorisation :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{aligned}$$

⊗ On dispose de majorations des fonctions circulaires données par leurs sens de variations. De plus, on a également la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|.$$