Chapitre 4 : Primitive et équation différentielle

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans ce chapitre, on étudie des fonctions continues $f : I \to \mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Primitives et exemples de référence

1.1 Introduction

Définition. *On dit que* $\underline{F : I \to \mathbb{K} \text{ est une primitive de } f}$ *si F est dérivable sur I et si $F' = f$.*

⊗ Les primitives de f sont les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ d'inconnue $y \in C^1(I, \mathbb{K})$.
⊗ On dispose des primitives de référence :

$f(x)$	$\exp(\alpha x)$	$\cos(\omega x)$	$\sin(\omega x)$	x^α si $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha x)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$	$\frac{-1}{\omega}\cos(\omega x)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\tan x$	$\frac{-1}{\tan x}$

$f(x)$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{1}{\sin x}$
$F(x)$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\ln\lvert\tan(x/2 + \pi/4)\rvert$	$\ln\lvert\tan(x/2)\rvert$

1.2 Opérations

Proposition 1.1. *Si F et G sont des primitives respectives de f et g alors :*

a) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.*
b) *La fonction $F \circ g$ est une primitive de $g' \times (f \circ g)$.*

⊗ Calcul de la primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ via l'exponentielle complexe.

Proposition 1.2 (Décomposition en éléments simples)**.** *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
Pour une fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $Q(x) = ax^2 + bx + c$, on peut calculer A le quotient polynomiale puis on a les décompositions avec des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer :*

a) *Si $\Delta > 0$ et x_1, x_2 sont les racines de Q alors $F(x) = A(x) + \frac{\lambda}{x-x_1} + \frac{\mu}{x-x_2}$.*
b) *Si $\Delta = 0$ et x_0 est l'unique racine de Q alors $F(x) = A(x) + \frac{\lambda}{x-x_0} + \frac{\mu}{(x-x_0)^2}$.*
c) *Si $\Delta < 0$ et $P(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$ avec $z = \alpha + i\beta$ et $\bar{z} = \alpha - i\beta$ les racines de Q alors $F(x) = A(x) + \frac{\lambda(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\mu}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.*

⊗ Ces écritures permettent d'obtenir une primitive sous forme de combinaison linéaire.
⊗ Dans le dernier cas, on utilise alors les primitives de références suivantes :
$x \mapsto \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)$.
$x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\beta}\text{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$.

2 Techniques de calcul intégrale

2.1 Intégrale de Riemann

La définition de l'intégrale sera vu dans un prochain chapitre. On calcul l'intégrale de fonction continue sur un segment $I = [a, b]$.

Proposition 2.1. *Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.*

a) *Pour $c \in [a, b]$, on dispose de la relation de Chasles :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

b) *Pour des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on dispose de la Linéarité :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g. \tag{2}$$

Théorème 2.2 (Théorème fondamentale de l'analyse différentielle)**.** *Si f est une fonction continue sur I et $c \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_c^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en c.*

Corollaire 2.3. *Toute fonction continue admet une primitive.*

$\otimes$ Il n'y a pas unicité.

Corollaire 2.4. *Si F est une primitive de f alors : $\int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.*

2.2 Intégration par parties

Proposition 2.5. *Soit F une primitive de f. Pour intégrer un produit, on dispose de la formule :*

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'. \tag{3}$$

$\otimes$ Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x \ln x - x$.

2.3 Changement de variables

Proposition 2.6. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction C^1, on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

$\otimes$ On note le changement de variables sous la forme $\begin{cases} x & = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

3 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

On recherche à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \tag{5}$$

où l'inconnue est $y \in C^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$ sont des paramètres.

Le paramètre b est le second membre. Si $b = 0$, on dit que l'équation est homogène.

3.1 Equation homogène et principe de superposition

Proposition 3.1. *Soit A un primitive de a. Les solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.*

⊗ Si $a(t) = \alpha \in \mathbb{K}$ est une constante alors les solutions sont $y(t) = \lambda e^{\alpha t}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.2. *Si y_p est une solution particulière alors toutes solutions s'écrit sous la forme :*

$$y_p + y_h \text{ pour tout } y_h \text{ solution homogène de l'équation.} \tag{6}$$

Proposition 3.3 (Principe de superposition)**.** *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, ..., b_n \in C^0(I, \mathbb{K})$.*
Si $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ est une combinaison linéaire et si on dispose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
de solutions particulières y_i de chacune des équations partielles :

$$y_i'(t) = a(t)y_i(t) + b_i(t),$$

alors $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ est une solution particulière de l'équation complète.

3.2 Recherche d'une solution particulière

Proposition 3.4. *Si l'équation est à coefficient constant $a(t) = \alpha$ et si $b(t) = P(t)e^{\beta t}$ avec P un polynôme, alors il existe une solution particulière de la forme :*

$$y_p(t) = Q(t)e^{\beta t} \text{ tel que } \deg Q = \begin{cases} \deg P + 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ \deg P & \text{sinon} \end{cases} \tag{7}$$

avec Q un polynôme à déterminer.

⊗ Les formules d'Euler permettent d'écrire $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$ et $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}e^{i\omega t} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega t}$.
Lorsque $b(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ ou $b(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$, on peut appliquer la méthode avec $\beta = r + i\omega$ et à l'aide du principe de superposition.

Proposition 3.5 (Méthode de Lagrange)**.** *Si A est une primitive de a. Il existe une solution particulière sous la forme :*

$$y_p(t) = K(t)e^{A(t)} \text{ avec } K \in C^1(I, \mathbb{K}) \text{ à déterminer.} \tag{8}$$

⊗ En réinjectant dans l'équation, on obtient l'équation $K'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.

Théorème 3.6 (Problème de Cauchy)**.** *Soient $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.*
Il existe une unique solution à tout problème de Cauchy d'ordre 1 constitué :
- *d'une équation différentielle $y' = ay + b$*
- *d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

4 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

On recherche à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t), \tag{9}$$

où $y \in C^2(I, \mathbb{K})$ est l'inconnue, $a_0, a_1 \in \mathbb{K}$ et $b \in C^0(I, \mathbb{K})$ sont des paramètres.

4.1 Equation homogène

Définition. *Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on définit* <u>*le polynôme caractéristique*</u> *par* $\chi(X) = X^2 + a_1 X + a_0$.

Proposition 4.1. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, on distingue deux cas suivant le discriminant de* χ.

- **a)** *Si* $\Delta = 0$*, notons* $y_1(t) = e^{\alpha t}$ *et* $y_2(t) = te^{\alpha t}$ *avec* α *l'unique racine double de* χ.
- **b)** *Si* $\Delta \neq 0$*, notons* $y_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ *et* $y_2(t) = e^{\alpha_2 t}$ *avec* $\alpha_1 \neq \alpha_2$ *les racines de* χ.

Les solutions homogènes sont engendrées par y_1 *et* y_2 *sous la forme :*

$$y_h = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ pour tout } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Proposition 4.2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, on distingue trois cas suivant le discriminant de* χ.

- **a)** *Si* $\Delta = 0$*, notons* $y_1(t) = e^{\alpha t}$ *et* $y_2(t) = te^{\alpha t}$ *avec* α *l'unique racine double de* χ.
- **b)** *Si* $\Delta > 0$*, notons* $y_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ *et* $y_2(t) = e^{\alpha_2 t}$ *avec* $\alpha_1 \neq \alpha_2$ *les racines de* χ.
- **c)** *Si* $\Delta < 0$*, notons* $y_1(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ *et* $y_2(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$ *avec* $r \pm i\omega$ *les racines conjuguées.*

Les solutions homogènes sont engendrées par y_1 *et* y_2 *sous la forme :*

$$y_h = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ pour tout } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

4.2 Recherche d'une solution particulière

Proposition 4.3. *Si l'équation est à coefficients constants et si* $b(t) = P(t)e^{\beta t}$ *avec* P *un polynôme, alors il existe une solution particulière de la forme :*

$$y_p(t) = Q(t)e^{\beta t} \text{ tel que } \deg Q = \begin{cases} \deg P + 2 & \text{si } \beta \text{ est racine double de } \chi \\ \deg P + 1 & \text{si } \beta \text{ est racine simple de } \chi \\ \deg P & \text{sinon} \end{cases} \tag{12}$$

avec Q *un polynôme à déterminer.*

Proposition 4.4 (Principe de superposition). *Si* $b(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k(t)$ *avec* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ *et* $b_1, ..., b_n \in C^0(I, \mathbb{K})$*. Si on dispose de solutions particulières* y_k *de chacune des équations partielles* $y_k'' + a_1 y_k' + a_0 y_k = b_k$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *alors les solutions de l'équation complète* $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ *sont :*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k + y_h \text{ avec } y_h \text{ solution homogène de l'équation.} \tag{13}$$

Théorème 4.5 (Problème de Cauchy). *Soient* $a_0, a_1, b \in C^0(I, \mathbb{K})$*,* $t_0 \in I$ *et* $y_0, v_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution à tout problème de Cauchy d'ordre 2 constitué :

- *d'une équation différentielle* $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$
- *de deux conditions initiales* $y(t_0) = y_0$ *et* $y'(t_0) = v_0$.