Chapitre 3 : Fonctions d'une variable réelle

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Formalisme et définition

Pour E un ensemble, on note l'ensemble des parties de E par :

$$\mathcal{P}(E) = \{X \text{ ensemble tel que } X \subset E\}. \tag{1}$$

Définition. *Soient E et F deux ensembles.*
On dit que $f : E \to F, x \mapsto f(x)$ est une application si : $\forall x \in E, \exists! y \in F, f(x) = y$.
Le graphe de l'application est la partie de $E \times F$ donnée par $\{(x, f(x))$ pour $x \in E\}$.
On note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des applications de E dans F.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications entre trois ensembles E, F et G.
On définit la composée $g \circ f : E \to G, x \mapsto g(f(x))$.

⊗ On peut définir l'application identité $id_E : E \to E, x \mapsto x$.

⊗ Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'indicatrice $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Définition. *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.*
On dit que f est injective si $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
On dit que f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
On dit que f est bijective si elle est injective et surjective.

⊗ L'application f est bijective ssi il existe $f^{-1} : F \to E$ tel que $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.
Dans ce cas, l'application f^{-1} s'appelle la réciproque de f.

Proposition 1.1. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications entre trois ensembles E, F et G.*

- **a)** *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- **b)** *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
- **c)** *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective. De plus, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

1.2 Image directe et image réciproque

Définition. *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.*
Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'image directe de A par $f(A) = \{f(x)$ pour $x \in A\} \in \mathcal{P}(F)$.
Pour $B \in \mathcal{P}(F)$, on définit l'image réciproque de B par $f^*(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\} \in \mathcal{P}(E)$.

Proposition 1.2. *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.*
Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$. On a :

- **a)** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- **b)** $f^*(B_1 \cup B_2) = f^*(B_1) \cup f^*(B_2)$.
- **c)** $f^*(B_1 \cap B_2) = f^*(B_1) \cap f^*(B_2)$.

⊗ Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. On a $f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.

Définition. *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.*
Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit la restriction à la source $f|_A : A \to F, x \mapsto f(x)$.
Pour $B \in \mathcal{P}(F)$ telle que $f(E) \subset B$, on définit la restriction à l'arrivée $f|^B : E \to B, x \mapsto f(x)$.

2 Dérivation des fonctions

2.1 Définition et propriétés

Définition. *Pour $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si les taux accroissements définis pour $x \in I \setminus \{a\}$ par $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admettent une limite finie lorsque x tend vers a.*

Dans ce cas, on note $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le nombre dérivé en a.

⊗ L'équation de la tangente en a à la courbe $y = f(x)$ est donnée par : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
⊗ Pour $n \in \mathbb{N}$, les <u>monômes</u> $f_n : x \mapsto x^n$ sont dérivables en tout point et $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Proposition 2.1. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

⊗ La réciproque est fausse avec par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Théorème 2.2. *Soit f une fonction dérivable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante.
Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante.

⊗ On adapte le théorème au cas décroissant et la conjonction donne le résultat crucial dans le calcul de primitives :

Pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f' = 0$ sur I ssi f est constante sur I.

2.2 Opérations

Proposition 2.3. *Soient f et g deux fonctions dérivables en a.*
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a). \tag{2}$$

Le produit $f \times g$ est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{3}$$

Si $g(a) \neq 0$ alors le quotient f/g est dérivable en a et

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{4}$$

Proposition 2.4. *Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)). \tag{5}$$

⊗ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Proposition 2.5. *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective de réciproque $f^{-1} : J \to I$.*
Si f est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \in J$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{6}$$

⊗ Application aux fonctions réciproques circulaires :
Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ dérivable sur $]-1, 1[$ avec $\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
Arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ dérivable sur $]-1, 1[$ avec $\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
et Arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3 Les fonctions de classe C^n

3.1 Dérivées successives

Définition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit* <u>*les dérivées n-ième de f*</u> *par récurrence en posant $f^{(0)} = f$ puis pour $n \in \mathbb{N}$ si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable alors $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.*
Si la dérivée n-ième existe et est continue, on dit que <u>*f est de classe C^n*</u> *et on note $f \in C^n(I, \mathbb{R})$.*
Si une fonction admet des dérivées à tout ordre, on dit que <u>*f est de classe C^∞*</u> *et on note $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.*

⊗ On a les inclusions d'ensembles :

$$C^\infty(I,\mathbb{R}) \subset ... \subset C^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset C^n(I,\mathbb{R}) \subset ... \subset C^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I,\mathbb{R}).$$

Proposition 3.1. *Les fonctions suivantes sont de classe C^∞ et pour $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\exp(\omega x)^{(k)} = \omega^k \exp(\omega x) \tag{7}$$

$$\cos(\omega x)^{(k)} = \omega^k \cos(\omega x + k\pi/2) \tag{8}$$

$$\sin(\omega x)^{(k)} = \omega^k \sin(\omega x + k\pi/2) \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-a)^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} & \textit{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{(-1)^k(n+k-1)!}{(n-1)!}\frac{1}{(x-a)^{n+k}}. \tag{11}$$

3.2 Opérations

Proposition 3.2. *Soient f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I.*

a) *Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est de classe C^n sur I et :*

$$\forall x \in I, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x). \tag{12}$$

b) *La fonction produit fg est dérivable sur I et on a la* <u>*Formule de Leibniz*</u> *:*

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \tag{13}$$

Proposition 3.3. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur J avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.*

Proposition 3.4. *Si $f : I \to f(I)$ est une bijection de classe C^n sur I et si f' ne s'annule pas alors la fonction réciproque f^{-1} est de classe C^n sur $f(I)$.*

4 Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

On considère désormais $f : I \to \mathbb{C}$ définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition. *On dit que* <u>*f est dérivable en a*</u> *si la limite des taux d'accroissement existe :*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

On construit de la même manière <u>*la fonction dérivée*</u> *$f' : I \to \mathbb{C}$ si f est dérivable sur I.*

Théorème 4.1. *La fonction f est dérivable sur I ssi les fonctions* $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ *sont dérivables sur I.*

$$\text{Pour tout } x \in I, f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x). \tag{15}$$

- ⊗ Les notions de dérivées n-ième et de classe C^n trouvent leurs extensions.
- ⊗ Les résultats sur les opérations s'étendent aux fonctions à valeurs complexes.
- ⊗ Le résultat sur la bijection réciproque n'a pas de sens.

Proposition 4.2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ sont des fonctions de classe C^n avec $f(I) \subset J$ alors leur composée $g \circ f : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^n et on a encore $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.*

Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $C^{(n)}$ alors $\exp \circ \varphi : I \to \mathbb{C}^*$ *est de classe $C^{(n)}$ et*

$$\forall x \in I, \exp(\varphi(x))' = \varphi'(x) \exp(\varphi(x)) \tag{16}$$