Chapitre 2 : Les nombres complexes

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

1 Introduction aux nombres complexes

1.1 Forme algébrique et opérations

Définition. On définit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par la donnée de deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ et on le note sous la forme algébrique $z = x + iy$.

Le nombre x s'appelle la partie réelle et se note $\operatorname{Re}(z)$.

Le nombre y s'appelle la partie imaginaire et se note $\operatorname{Im}(z)$.

Soient $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. On définit les opérations sur $\mathbb{C}$ par les règles suivantes :

addition : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

produit : $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

⊗ Les opérations d'addition et de produit conservent les propriétés de calcul usuelles.

1.2 Conjugaison complexe

Définition. Pour un nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit son conjugué complexe par $\bar{z} = x - iy$.

Proposition 1.1. Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes :

a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Corollaire 1.2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On dispose des caractérisations suivantes :

a) z est un réel i.e. $z \in \mathbb{R}$ ssi $\bar{z} = z$.

b) z est un imaginaire pur i.e. $z \in i\mathbb{R}$ ssi $\bar{z} = -z$.

2 Module et Argument

2.1 Modules

Définition. On définit le module d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.

Proposition 2.1. Soit $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On dispose des formules :

a) $|z|^2 = z\bar{z}$.

b) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ avec égalité ssi $z \in \mathbb{R}$.

c) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ avec égalité ssi $z \in i\mathbb{R}$.

d) On a : $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

Théorème 2.2 (Inégalité triangulaire). Pour deux nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a l'encadrement :

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

De plus, l'égalité est vérifiée : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ssi z_1 et z_2 sont colinéaires de même sens ssi $z_1 = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z_2 = \lambda z_1$ ssi $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$.

2.2 Nombres complexes de module 1

Définition. On définit le cercle unité comme étant l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}.$$

Il existe un paramétrage du cercle unité par :

$$\mathbb{U} = \{\cos \theta + i \sin \theta \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}\}.$$

On définit alors l'expression exponentielle par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

⊗ Le cercle unité est stable par produit et puissance mais n'est pas stable par somme.

On définit le réel π par la propriété : $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 2.3. Soit $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ des mesures d'angles. On a :

a) $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

b) $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

c) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (Formules d'Euler).

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre).

⊗ On peut utiliser la technique de l'arc moitié pour factoriser $e^{ip} \pm e^{iq}$ sous la forme :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i(p+q)/2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } e^{ip} - e^{iq} = 2ie^{i(p+q)/2} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2.3 Ecriture trigonométrique

Définition. Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet une écriture trigonométrique de la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z|$ le module et $\theta \equiv \text{Arg}(z)[2\pi]$ l'argument.

⊗ Les arguments ne sont définis que modulo 2π avec pour définition : $\theta_1 \equiv \theta_2[2\pi] \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 2.4. Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On dispose des formules :

a) $\text{Arg}(z_1 z_2) \equiv \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)[2\pi]$,

b) $\text{Arg}(1/z) \equiv -\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(\bar{z})[2\pi]$,

c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\text{Arg}(z^n) \equiv n\text{Arg}(z)[2\pi]$.

⊗ Application : On peut réécrire un signal périodique :

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t - \varphi) \text{ avec } a + ib = A e^{i\varphi}.$$

2.4 Exponentielle complexe

Définition. On définit la fonction exponentielle complexe par :

$$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^{\text{Re}z} \cos(\text{Im}z) + ie^{\text{Re}z} \sin(\text{Im}z).$$

Proposition 2.5. Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On dispose des formules :

a) $\exp_{\mathbb{C}}(z_1 + z_2) = \exp_{\mathbb{C}}(z_1) \exp_{\mathbb{C}}(z_2)$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, $\exp_{\mathbb{C}}(nz) = \exp_{\mathbb{C}}(z)^n$,

b) $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = e^{\text{Re}z}$ et $\text{Arg}(\exp_{\mathbb{C}}(z)) \equiv \text{Im}z[2\pi]$,

c) $\exp_{\mathbb{C}}(z_1) = \exp_{\mathbb{C}}(z_2)$ ssi $z_2 - z_1 \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

⊗ L'exponentielle complexe prolonge naturellement les notations e^x et $e^{i\theta}$ pour un réel ou un imaginaire pur. Si il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter $\exp(z)$ ou plus simplement e^z . Attention les propriétés analytiques de la fonction n'ont plus nécessairement de sens. Par exemple, on ne peut pas déterminer si $z \mapsto e^z$ est dérivable, croissante ou minorée.

3 Application à la géométrie plane

On fixe un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ du plan.

3.1 Affixe de point ou de vecteur

Définition. Tout vecteur $\vec{v}$ du plan se décompose suivant $\vec{v} = a.\vec{u}_x + b.\vec{u}_y$. Le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'appelle les coordonnées cartésiennes du vecteur. Le complexe $a+ib \in \mathbb{C}$ est une donnée équivalente et s'appelle l'affixe du vecteur.

Les coordonnées et affixes d'un point A du plan sont respectivement celles du vecteur $\vec{OA}$. Ainsi si $z = x + iy$ est l'affixe de A alors $\vec{OA} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y$.

⊗ L'écriture algébrique de l'affixe permet de retrouver les coordonnées cartésiennes. L'écriture trigonométrique de l'affixe permet de retrouver les coordonnées polaires.

Proposition 3.1. Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ des points et leurs affixes.

- a) L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$.
- b) La distance de A à B est $|z_B - z_A|$.
- c) L'angle orienté vaut $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \text{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$.

Proposition 3.2. Soient $\vec{v}_1(z_1)$ et $\vec{v}_2(z_2)$ deux vecteurs. On a :

- a) Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires ssi $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$.
- b) Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux ssi $z_1 \bar{z}_2 \in i\mathbb{R}$.

3.2 Transformations du Plan

On dispose de plusieurs transformations du plan qui transportent un point $A(z)$ en un point $A'(z')$.

La translation de vecteur $\vec{v}(z_v)$ est définie géométriquement par $\vec{AA'} = \vec{v}$.

Elle est donnée par la correspondance des affixes $z' = z + z_v$.

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est définie géométriquement par

les deux conditions $\Omega A' = \Omega A$ et $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega A'}) = \theta [2\pi]$.

Elle est donnée par la correspondance des affixes $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est définie géométriquement par $\vec{\Omega A'} = \lambda \vec{\Omega A}$.

Elle est donnée par la correspondance des affixes $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est donnée par la correspondance des affixes $z' = \bar{z}$.

4 Résolution d'équations polynomiales

4.1 Polynômes du second degré

On recherche à résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec des paramètres $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$ et l'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Pour résoudre, on calcul le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

Proposition 4.1. Soit $\Delta \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non nul.

Les racines carrées sont les nombres complexes δ et $-\delta$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$. On peut les déterminer à l'aide d'une des méthodes :

sous forme trigonométrique : Si $\Delta = \rho e^{i\theta}$ alors $\delta = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$.

sous forme algébrique : Si $\Delta = A + iB$ alors $\delta = a + ib$ est solution du système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = A & (\text{Partie réelle}) \\ 2ab = B & (\text{Partie imaginaire}) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2} & (\text{Module}) \end{cases}$$

⊗ La notation $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \in \mathbb{R}_+$ est un réel positif.

Théorème 4.2. *Les racines d'un polynôme du second degré sont données suivants les cas :*

Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution dite double $-b/2a$.

Si $\Delta \neq 0$ et δ est une racine carrée de Δ alors les deux solutions sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

⊗ Application : Les solutions d'un système symétrique du type $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$

sont les racines du polynôme $(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - SX + P$.

4.2 Racines n -ième d'un complexe

On recherche à résoudre les équations de la forme $z^n = \rho e^{i\theta}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'ensemble des racines n -ième de l'unité par :*

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = 1\}.$$

Proposition 4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe exactement n racines de l'unité donnée par la paramétrisation :*

$$\mathbb{U}_n = \{ \exp(2ik\pi/n) \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}.$$

Théorème 4.4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

Il existe exactement n solutions de l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$ donnée par : $\omega \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$ pour $\omega \in \mathbb{U}_n$.

⊗ La notation $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ n'a de sens que si $x \in \mathbb{R}_+$ est un réel positif.