Chapitre 6 : Limite et continuité des fonctions de la variable réelle

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

1 Limite d'une fonction en un point

Dans cette partie, on étudie des fonctions de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$ un point de la clôture de l'intervalle.

1.1 Voisinage dans $\mathbb{R}$

Définition. Si $a \in \mathbb{R}$, toute approximation $\eta > 0$ définit l'intervalle $]a - \eta, a + \eta[$ un voisinage de a .
Si $a = +\infty$, toute borne $M \in \mathbb{R}$ permet de définir l'intervalle $]M, +\infty[$ appelé voisinage de $+\infty$.
Si $a = -\infty$, toute borne $M \in \mathbb{R}$ permet de définir l'intervalle $] - \infty, M[$ appelé voisinage de $-\infty$.

- ⊗ L'intersection de deux voisinages d'un même point est encore un voisinage de ce point.
- ⊗ L'intersection d'un nombre fini de voisinages d'un même point est encore un voisinage de ce point.

Définition. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que f tend en a vers l si :

$$\text{Pour tout voisinage } V_l \text{ de } l, \text{ il existe un voisinage } U_a \text{ de } a \text{ tel que } f(U_a \cap I) \subset V_l. \quad (1)$$

- ⊗ Dans la pratique, on développe cette assertion en fonction de la nature des points a et l , par exemple :

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 2} +\infty &\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, x \in]2 - \eta, 2 + \eta[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[. \\ f(x) \rightarrow_{x \rightarrow -\infty} -\pi &\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < M \Rightarrow |f(x) + \pi| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 1.1. a) Si f admet une limite finie en a alors f est bornée sur un voisinage de a .
b) Pour une limite finie $l \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} l \Leftrightarrow |f(x) - l| \rightarrow_{x \rightarrow a} 0$.

- ⊗ La formule de factorisation $x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ permet d'obtenir $x^n \rightarrow_{x \rightarrow a} a^n$.

Théorème 1.2. Si la limite d'une fonction en un point existe alors elle est unique.

1.2 Opérations sur les limites

Proposition 1.3. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit a un point de la clôture de I .

a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. La limite de la combinaison linéaire :

$$\text{Si } f_1 \rightarrow_a l_1 \text{ et } f_2 \rightarrow_a l_2 \text{ alors } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \rightarrow_a \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2. \quad (2)$$

b) La limite du produit :

$$\text{Si } f_1 \rightarrow_a l_1 \text{ et } f_2 \rightarrow_a l_2 \text{ alors } f_1 f_2 \rightarrow_a l_1 l_2. \quad (3)$$

- ⊗ Les polynômes $P(x) = \sum_{n=0}^d c_n x^n$ vérifient pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.

Théorème 1.4 (Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ssi } \forall (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n \rightarrow a \Rightarrow f(u_n) \rightarrow l). \quad (4)$$

Proposition 1.5. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. La composée $g \circ f$ vérifie :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c. \quad (5)$$

1.3 Encadrement des limites

Proposition 1.6. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des limites en a . Si sur un voisinage de a , $f \leq g$ alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

⊗ Ce résultat n'est vérifié qu'avec des inégalités au sens large.

Théorème 1.7 (d'encadrement). Soient f, g et h trois fonctions définies sur I . Si, sur un voisinage de a , $f \leq g \leq h$ et si $\lim_a f = \lim_a h = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a g = l$.

Théorème 1.8 (de comparaison). Soient f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que sur un voisinage de a , $f \leq g$.

- a) Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$.
- b) Si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$.

1.4 Limites à gauche et à droite

Dans cette partie, on considère un point $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$ de l'intérieur de l'intervalle.

Définition. Pour une approximation $\eta > 0$, l'intervalle $]a - \eta, a[$ est un voisinage à gauche de a et $]a, a + \eta[$ est un voisinage à droite de a .

- ⊗ Les voisinages partiels en un même point sont également stables par intersection finie.
- ⊗ Il y a donc unicité de ces limites. Les résultats sur les opérations et la composition sont vérifiés.

Théorème 1.9 (Théorème de la limite monotone). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone alors elle admet des limites à gauche et à droite en tout point.

- a) Si f est croissante alors pour $a \in I$, $\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$.
- b) Si f est décroissante alors pour $a \in I$, $\lim_{a^-} f \geq f(a) \geq \lim_{a^+} f$.

⊗ La fonction partie entière $E : x \mapsto [x]$ admet des limites à droite et à gauche en tout point.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n^-} E = n - 1 \text{ et } \lim_{n^+} E = n. \quad (6)$$

2 Continuité des fonctions

Dans cette partie, on étudie des fonctions de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ un point de l'intervalle.

2.1 Continuité en un point

Définition. On dit que f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$.

On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{a^+} f = f(a)$.

On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{a^-} f = f(a)$.

- ⊗ Les polynômes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.
- ⊗ La fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. Soient f et g deux fonctions continues en a .

- a) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- b) Le produit fg est continue en a .
- c) Si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est continue en a .

⊗ Les fractions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.

Proposition 2.2. Si $u_n \rightarrow a$ et si f est continue en a alors la suite $f(u_n) \rightarrow f(a)$.

Proposition 2.3. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

⊗ Les fonctions hyperboliques sont continues en tout point de $\mathbb{R}$:

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

2.2 Continuité sur un intervalle

Définition. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I . On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. Soient f et g deux fonctions continues sur I .

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est continue sur I .
- Le produit fg est continue sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I alors le quotient f/g est continue sur I .

Proposition 2.5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur I et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Proposition 2.6. Soit $c \in I$ et $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $\lim_c f = l$ existe et est finie alors on peut prolonger la fonction par continuité en posant $f(c) = l$.

2.3 Théorèmes sur la continuité

Théorème 2.7 (Théorème des Valeurs Intermédiaires). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, s'ils existent $a, b \in I$ tels que $f(a) < \lambda < f(b)$ alors il existe $c \in I$ tel que $\lambda = f(c)$.

⊗ La démonstration utilise la méthode de dichotomie à savoir programmer en Python dans le cas où $\lambda = 0$:

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    assert f(a)*f(b)<0
    g, d = a, b
    while d-g > epsilon:
        m = (g+d)/2
        if f(m)*f(g)>0:
            g = m
        else:
            d = m
    return (g+d)/2
```

Le programme renvoie une approximation à 'epsilon' près d'un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

⊗ On peut étendre ce résultat avec $a = \inf I$ ou $b = \sup I$ étant les bornes de l'intervalle, on remplace alors $f(a)$ par $\lim_a f$ et $f(b)$ par $\lim_b f$.

Corollaire 2.8. Si f est continue sur I un intervalle alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 2.9 (Théorème de la borne atteinte). Si f est continue sur un segment $I = [a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\text{Ils existent } c_+, c_- \in I \text{ tels que } f(c_+) = \sup_I f \text{ et } f(c_-) = \inf_I f. \quad (7)$$

Corollaire 2.10. Si f est continue sur I un segment alors $f(I)$ est un segment.

Théorème 2.11 (Théorème de la bijection continue). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f|_I^{f(I)} : I \rightarrow f(I)$ est une bijection.

De plus sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de la même monotonie.

⊗ On peut construire les fonctions circulaires réciproques :

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \text{ et } \text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[\quad (8)$$

3 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette partie, on étudie des fonctions de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$ un point de la clôture de l'intervalle.

3.1 Limite dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de bornes infinies. On étudie donc que des limites finies.

Définition. Soit $l \in \mathbb{C}$.

a) Pour une approximation $\varepsilon > 0$, le disque fermé $D_\varepsilon(l)$ est un voisinage de l .

$$D_\varepsilon(l) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - l| \leq \varepsilon\}. \quad (9)$$

b) La notion de voisinage permet d'obtenir les définitions :

$$\lim_a f = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

$$\lim_{+\infty} f = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

$$\lim_{-\infty} f = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (12)$$

Proposition 3.1. Soit $l \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow \left(\lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(l) \text{ et } \lim_a \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(l) \right). \quad (13)$$

⊗ Ceci permet d'étendre les résultats sur les opérations à $\mathbb{C}$ mais pas sur la composition.

3.2 Continuité de fonction à valeurs complexes

Définition. On dit que f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$.

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2. On a l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont continues sur } I. \quad (14)$$

⊗ Ceci permet d'étendre les résultats sur les opérations aux fonctions à valeurs complexes.

Proposition 3.3. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{C}$ avec $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

⊗ Dans ce résultat, seule la dernière fonction de la composée peut être à valeurs complexes.