Chapitre 5 : Nombres réels et suites numériques

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 L'ensemble des nombres réels

1.1 Borne supérieure et inférieure

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une partie des réels, i.e $A \subset \mathbb{R}$.

Définition. *S'il existe un majorant M de A qui appartient à la partie A alors on dit que M est le maximum de A et on le note $max(A)$.*

De même, si $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A qui appartient à A alors on note $m = min(A)$ et on l'appelle le minimum de A.

S'il existe un plus petit majorant de A alors on l'appelle la borne supérieure et on le note $\sup(A)$: $\forall M \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, M \geq a) \Rightarrow (M \geq \sup A)$.

S'il existe un plus grand minorant de A alors on l'appelle la borne inférieure et on le note $\inf(A)$: $\forall m \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, m \leq a) \Rightarrow (m \leq \inf A)$.

$\otimes$ Il n'y pas nécessairement l'existence : $]-1, 1[$ n'a ni maximum ni minimum mais admet une borne supérieure et inférieure.

Proposition 1.1. *S'ils existent le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure d'une partie sont uniques.*

Théorème 1.2 (Axiome de $\mathbb{R}$)**.** *Toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Proposition 1.3. **a)** *Si A admet une borne supérieure alors on a :*

$$\max A = \sup A \Leftrightarrow \sup A \in A.$$

b) *De même si A admet une borne inférieure alors $\min A = \inf A \Leftrightarrow \inf A \in A$.*

1.2 Parties denses et convexes

Définition. *On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est convexe si $\forall a, b \in A, [a, b] \subset A$.*
On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense si $\forall a, b \in \mathbb{R}, [a, b] \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 1.4. *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Définition. *On définit la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$ comme étant l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ vérifiant :*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'approximation décimale de $x \in \mathbb{R}$ par $x_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$. Elle vérifie :

$$x_n \leq x < x_n + 10^{-n}.$$

Proposition 1.5. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

2 Les suites à valeurs réelles

2.1 Généralités

On étudie les suites $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Elles peuvent être définies de manière explicite ou récurrente.

$\otimes$ Une suite arithmétique est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$ la raison de la suite.
Son expression explicite est alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

$\otimes$ Une suite géométrique est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$ avec $q \in \mathbb{R}^*$ la raison de la suite.
Son expression explicite est alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

$\otimes$ Une suite arithmético-géométrique est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = Au_n + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A \neq 1$ et $B \neq 0$.
Le point fixe de la récurrence est l'unique $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $l = Al + B$.
L'expression explicite de la suite est alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A^n(u_0 - l) + l$.

Définition. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$.
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

$\otimes$ L'ensemble des termes de la suite $\{u_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$ s'appelle le support de la suite.

Proposition 2.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

a) *Si une suite est majorée à partir d'un certain rang i.e. $\exists N \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, u_n \leq M$ alors la suite est majorée.*

b) *Si une suite est minorée à partir d'un certain rang alors elle est minorée.*

c) *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée ssi la suite $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est majorée.*

$\otimes$ Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont celles définies par leurs deux premiers termes $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. On lui associe le polynôme caractéristique $\chi(X) = X^2 - AX - B$.

Proposition 2.2. *On dispose des expressions explicites selon la valeur du discriminant $\Delta = A^2 + 4B$.*

a) *Si $\Delta = 0$ et $q_0 = A/2$ est la racine double de χ alors ils existent d'uniques coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)q_0^n$.*

b) *Si $\Delta > 0$ et $q_1 \neq q_2$ sont les racines réelles de χ alors ils existent d'uniques coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$.*

c) *Si $\Delta < 0$ et $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ sont les racines complexes conjuguées de χ alors ils existent d'uniques coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))$.*

$\otimes$ Les coefficients λ_1 et λ_2 peuvent être déterminés à l'aide des deux premiers termes.

2.2 Convergence d'une suite

Définition. *Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$.*

a) *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite l et on note $u_n \to l$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

b) *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

c) *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $-\infty$ et on note $u_n \to -\infty$ si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq M.$$

Proposition 2.3. *Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$.*

a) *On a $u_n \to l$ ssi $|u_n - l| \to 0$.*
b) *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers une limite finie alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.*

Théorème 2.4. *Si elle existe la limite d'une suite est unique.*

Définition. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice si elle est strictement croissante. On peut alors considérer la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$. Si $u_{\varphi(n)} \to l_1$ alors on dit que l_1 est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

Proposition 2.5. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l alors toutes ses suites extraites convergent vers l.*

$\otimes$ La contraposée fournit une technique pour montrer qu'une suite diverge sans limite.
Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1 donc diverge sans limite.
$\otimes$ Si $u_{2n} \to l$ et $u_{2n+1} \to l$ alors en passant à la définition, on peut montrer que $u_n \to l$.

2.3 Opérations sur les limites

Proposition 2.6. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $u_n \to l_1$ et $v_n \to l_2$.*

Combinaison linéaire Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda u_n + \mu v_n) \to \lambda l_1 + \mu l_2$.
Produit et Quotient On a $(u_n \times v_n) \to l_1 \times l_2$ et $(u_n/v_n) \to l_1/l_2$.
Inégalité Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$ alors $l_1 \leq l_2$.

$\otimes$ Les seules indéterminations étant $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Proposition 2.7. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles.*
Si $u_n \to 0$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ est bornée alors $u_n \times v_n \to 0$.

2.4 Théorèmes d'existence de limite

Théorème 2.8 (de comparaison)**.** *Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles telles que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$.*

a) *Si $u_n \to l$ et $w_n \to l$ alors $v_n \to l$.*
b) *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
c) *Si $w_n \to -\infty$ alors $v_n \to -\infty$.*

Théorème 2.9 (de limite monotone)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*

a) *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie.*
b) *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie.*
c) *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et non majorée alors $u_n \to +\infty$.*
d) *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et non minorée alors $u_n \to -\infty$.*

Théorème 2.10 (des suites adjacentes)**.** *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles.*
Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et $(v_n - u_n) \to 0$ alors on dit que les suites sont adjacentes. Elles admettent une limite commune $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

2.5 Suite récurrente autonome

On recherche à étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
$\otimes$ Si la suite converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que f est continue en l alors $f(l) = l$. On recherche donc les candidats pour la valeur de limite en trouvant les points fixes $f(l) = l$.
$\otimes$ S'il existe un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, on dit que l'intervalle est stable par f. Les variations de f permettent d'établir la valeur de $f(I)$.

On recherche un intervalle stable par la fonction f de la forme $]l_1, l_2[$, $]-\infty, l[$ ou $]l, +\infty[$ avec l, l_1 et l_2 des points fixes de f.

Une récurrence immédiate montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
$\otimes$ On étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle stable I. On a $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$. Donc si $g \geq 0$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et si $g \leq 0$ alors la suite est décroissante.
$\otimes$ Le théorème de la limite monotone permet alors d'en déduire la convergence vers un point fixe ou la divergence de la suite.

3 Les suites à valeurs complexes

On étudie désormais des suites $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à valeurs complexes.
$\otimes$ Les formules des suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique restent valides.

Proposition 3.1. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et la relation $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n$ avec $A, B \in \mathbb{C}$. On note $\chi(X) = X^2 - AX - B$ le polynôme caractéristique.*

- **a)** *Si $\Delta = 0$ et $q_0 = A/2$ est la racine double de χ alors ils existent d'uniques coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)q_0^n$.*
- **b)** *Si $\Delta \neq 0$ et $q_1 \neq q_2$ sont les racines complexes de χ alors ils existent d'uniques coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$.*

Définition. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs complexes et $l \in \mathbb{C}$.*

- **a)** *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l et on note $u_n \to l$ si :*
  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$.
- **b)** *On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.*

$\otimes$ La divergence vers un infini n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.
$\otimes$ Si une suite converge alors elle est bornée.

Théorème 3.2. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs complexes et $l \in \mathbb{C}$.*
On a l'équivalence $u_n \to l$ ssi $\begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(l) \end{cases}$.

$\otimes$ On en déduit l'adaptation de la plupart des résultats sur les suites réelles.
L'unicité de la limite, la définition des suites extraites, les règles sur les opérations restent valides.
$\otimes$ Le caractère monotone ne peut pas s'adapter à une suite à valeurs complexes. Donc les théorèmes d'existence de limite n'ont pas de version dans les complexes.