Chapitre 8 : Calcul matriciel et système linéaire

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

Dans ce chapitre, les coefficients sont des scalaires de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'ensemble des matrices

1.1 Opérations sur les matrices

Définition. On dit qu'une collection de $n \times p$ scalaires ordonnées sous la forme $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de n lignes et p colonnes. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Le coefficient $a_{i,j}$ est celui de la i -ième ligne et la j -ième colonne et se note $[A]_{i,j}$.

Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de même taille et pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on définit la combinaison linéaire comme étant la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donnée par l'expression de ses coefficients :

$$\text{Pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p, \quad [\lambda A + \mu B]_{i,j} = \lambda[A]_{i,j} + \mu[B]_{i,j}. \quad (1)$$

Pour deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n_2,n_3}(\mathbb{K})$ de tailles compatibles, on définit le produit comme étant la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n_1,n_3}(\mathbb{K})$ donnée par l'expression de ses coefficients :

$$\text{Pour tout } 1 \leq i \leq n_1 \text{ et } 1 \leq j \leq n_3, \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_2} [A]_{i,k} [B]_{k,j}. \quad (2)$$

Proposition 1.1. Le produit est une opération associative :

$$\text{Pour } A \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n_2,n_3}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n_3,n_4}(\mathbb{K}), \quad (AB)C = A(BC). \quad (3)$$

Le produit est distributif par rapport à l'addition à droite et à gauche :

$$\text{Pour } A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n_2,n_3}(\mathbb{K}), \quad (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B. \quad (4)$$

$$\text{Pour } A \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K}), B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n_2,n_3}(\mathbb{K}), \quad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2. \quad (5)$$

⊗ Le produit n'est pas commutatif, par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Les matrices carrées

Définition. On dit qu'une matrice est carrée si elle a même nombre de colonnes et de lignes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p \times p$.

On dispose de $(0) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice nulle qui ne contient que des 0.

On note $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice identité qui contient des 1 dans sa diagonale et 0 sinon.

⊗ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est stable par toutes les opérations.

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on peut définir les puissances de la matrice par récurrence :

$$A^0 = I_p \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A^n A. \quad (6)$$

- ⊗ On dispose des règles $A^{a_1+a_2} = A^{a_1}A^{a_2}$ et $A^{ab} = (A^a)^b$.
- ⊗ Le calcul des puissances peut se faire par récurrence si on conjecture une expression à démontrer.

Proposition 1.3 (Formule du binôme de Newton). *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent $AB = BA$ alors :*

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \quad (7)$$

- ⊗ Ceci permet le calcul des puissances sans connaître à posteriori la formule à démontrer.

1.3 Transposition des matrices

Définition. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la transposée et note A^T la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\text{Pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p, [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}. \quad (8)$$

On dit que $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est symétrique si $S^T = S$.

On dit que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est antisymétrique si $A^T = -A$.

Proposition 1.4. *La transposée est une involution : $(A^T)^T = A$ pour toute matrice A .
Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{K})$ deux matrices de même taille et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :*

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T. \quad (9)$$

Pour $A \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n_2, n_3}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles compatibles, on a :

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (10)$$

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $(A^T)^n = (A^n)^T$.

Définition. *On dit qu'une matrice $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est diagonale si :*

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (i \neq j) \Rightarrow [D]_{i,j} = 0. \quad (11)$$

On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (i > j) \Rightarrow [T]_{i,j} = 0. \quad (12)$$

On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (i < j) \Rightarrow [T]_{i,j} = 0. \quad (13)$$

- ⊗ La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure. Les matrices diagonales sont en particulier symétrique, triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Proposition 1.5. *L'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont stables par les opérations.*

1.4 Matrices inversibles

Définition. *On dit que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_p = BA$. Dans ce cas, la matrice B est unique et on la note A^{-1} .*

On appelle groupe linéaire l'ensemble des matrices inversibles et on le note $GL_p(\mathbb{K})$.

Proposition 1.6. *L'inversion est une involution : $(A^{-1})^{-1} = A$ pour tout A inversible.*

Si A et B sont inversibles alors $AB \in GL_p(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Si A est inversible alors toute puissance A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Si A est inversible alors la transposée est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proposition 1.7. *Soit T une matrice triangulaire.*

T est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

2 Système linéaire

2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On recherche à résoudre le système linéaire à n équations et p inconnues de la forme :

$$\sum_{k=1}^p a_{l,k} x_k = b_l \text{ pour } l \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (\mathcal{S})$$

Les inconnues du système sont des scalaires $\mathbf{x} = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{K}^p$.

Les scalaires $A = (a_{l,k})_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les coefficients du système.

Les scalaires $\mathbf{b} = (b_l)_{1 \leq l \leq n} \in \mathbb{K}^n$ sont les seconds membres du système.

On peut écrire matriciellement le système sous la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- ⊗ On définit le système homogène associée $\mathcal{S}_0$ comme étant celui sans second membre $A\mathbf{x} = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- ⊗ L'écriture complète d'un système peut être effectuée à l'aide d'une matrice augmentée par exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z + t = 7 \\ x + z + 2t = 1 \\ 3x + 2y - t = -4 \end{cases} \text{ s'écrit } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right).$$

Proposition 2.1 (Linéarité). Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^p$ sont des solutions homogènes du système $\mathcal{S}_0$ alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ est une solution homogène.

Proposition 2.2. Si on dispose d'une solution particulière $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$ du système $\mathcal{S}$ alors l'ensemble des solutions est :

$$\mathbf{y} + \mathbf{u} = (y_1 + u_1, \dots, y_p + u_p) \text{ pour toute solution homogène } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{K}^p. \quad (14)$$

2.2 Opérations élémentaires sur les systèmes

Définition. On dispose de trois opérations élémentaires sur les systèmes :

Transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ deux indices de lignes et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Dilatation $L_i \leftarrow \mu L_i$ avec i un indice de ligne et $\mu \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul.

Permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$ deux indices de lignes.

On dit que deux systèmes sont équivalents par lignes et on note $\mathcal{S}_1 \sim_L \mathcal{S}_2$ si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'opérations élémentaires.

- ⊗ L'équivalence par lignes des systèmes est une relation d'équivalence.

Proposition 2.3. Deux systèmes équivalents par lignes admettent le même ensemble de solutions.

2.3 Méthode du pivot de Gauss-Jordan

Définition. On dit qu'un système est échelonné si il est de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} p_1 & * & \dots & * & b_1 \\ 0 & p_2 & (*) & \vdots & b_2 \\ \vdots & (0) & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_r & b_r \\ 0 & (0) & (0) & (0) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n \end{array} \right) \quad (15)$$

avec des coefficients $p_k \neq 0$ appelé pivots du système.

De plus, un système échelonné est dit réduit si tous ses pivots valent 1 et que les autres coefficients de la colonne d'un pivot valent 0.

- ⊗ Dans un système échelonné, tous les coefficients 'à gauche et en dessous' d'un pivot sont nuls.
- ⊗ Il y a au plus un pivot par lignes et par colonnes. Les dernières lignes peuvent ne pas contenir de pivots et sont alors nulles. Les colonnes sans pivot peuvent se situer à toute place et ne sont pas nécessairement nulles.

Théorème 2.4 (Algorithme du Pivot de Gauss-Jordan). *Tout système est équivalent par ligne à un unique système échelonné réduit.*

- ⊗ Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :
 1. On remonte le prochain pivot en haut du système à l'aide d'une Permutation.
 2. On réduit le pivot à la valeur 1 à l'aide d'une Dilatation.
 3. On annule tous les autres coefficients de la colonne à l'aide de Transvections.

2.4 Rang d'un système linéaire

Définition. On appelle rang d'un système le nombre de pivots dans le système échelonné réduit qui lui est équivalent.

On dit qu'un système est compatible si il admet au moins une solution. Sinon on dit que le système est incompatible.

Théorème 2.5 (Théorème du rang). *Sous la forme échelonnée réduite, le système est compatible si les lignes nulles ont toutes un second membre nul. Dans ce cas, on note r le rang du système. Les colonnes sans pivots sont des paramètres $(t_1, \dots, t_{p-r}) \in \mathbb{K}^{p-r}$ qui peuvent être quelconques. Les lignes avec les pivots permettent de déterminer les r variables fixées par ces paramètres.*

- ⊗ On illustre cette méthode sur le système échelonné réduit suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ le système est compatible de rang 2 avec 2 paramètres} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 - 2x_4 & = 2 - 3t_1 - 2t_2 \\ x_2 \text{ (sans pivot)} & = t_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 4 + 2x_4 & = 4 + 2t_2 \\ x_4 \text{ (sans pivot)} & = t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 Matrices élémentaires et réduction

3.1 Réduction de Gauss-Jordan

Définition. Chacune des opérations élémentaires sur les lignes est associée à une matrice élémentaire $E \in GL_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de la matrice I_n en effectuant l'opération élémentaire $I_n \sim_L E$.

- ⊗ Si $n = 3$, la matrice élémentaire associée à la dilatation $L_2 \leftarrow 5L_2$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Celle associée à la transvection $L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Celle associée à la permutation $L_1 \leftrightarrow L_2$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1. *Si E est une matrice élémentaire associée à une opération élémentaire et que $A \sim_L A'$ par cette opération alors on dispose de l'écriture matricielle : $A' = EA$.*

Théorème 3.2 (Réduction de Gauss-Jordan). *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = ER$ avec :*

- $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée réduite.
- $E \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible obtenue comme produit de matrices élémentaires.

Définition. *On dit que $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de même taille sont équivalentes par colonnes et on note $A \sim_C B$ si on peut construire B à partir de A par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.*

Proposition 3.3. *On a : $A \sim_C B \Leftrightarrow A^T \sim_L B^T$.*

Si $A \sim_C A'$ par une opération élémentaire associée à une matrice élémentaire E alors $A' = AE$.

3.2 Inversibilité des matrices carrées

Théorème 3.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est inversible.
- (ii) $A \sim_L I_n$.
- (iii) $\text{rg}(A) = n$.
- (iv) Le système $A\mathbf{x} = 0$ admet pour unique solution $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{K}^n$.
- (v) Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une unique solution.
- (vi) Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution.

⊗ Ceci permet d'obtenir une méthode de calcul d'inverse en augmentant A de I_n . Si A est inversible, on a alors :

$$(A|I_n) \sim_L (I_n|A^{-1}) \text{ ou bien } (A|I_n) \sim_C (I_n|A^{-1}). \quad (16)$$

On choisit de faire que des opérations sur les lignes et aucune sur les colonnes ou bien que sur les colonnes et aucune sur les lignes.

⊗ On ne peut pas alterner les opérations sur les lignes et les colonnes.

Proposition 3.5. *Les matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont inversibles ssi $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (17)$$