Chapitre 7 : Dérivabilité des fonctions de la variable réelle

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 Propriétés des fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Développement limité d'ordre 1

Rappel : On dit que f est dérivable en a si les taux d'accroissements admettent une limite finie :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
On définit alors la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$.

Proposition 1.1. *La fonction f est dérivable en a ssi elle admet un développement limité d'ordre 1 de la forme :*

$$f(a + h) =_{h \to 0} f(a) + hf'(a) + o(h) \tag{2}$$

⊗ On peut également écrire $f(x) =_{x \to a} f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$ qui fait apparaître l'équation de la tangente à la courbe.
⊗ Ceci permet d'introduire la Méthode d'Euler de résolution d'équation différentielle par discrétisation de la variable. Pour résoudre le problème de Cauchy d'ordre 1 non linéaire $\begin{cases} y'(t) & = f(y(t), t) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$, on peut écrire le programme :

```
def euler_ordre1(f, t0, y0, dt, tfinal):
    t, y = t0, y0
    lt, ly = [], []
    while t<tfinal:
        t += dt
        y += f(y,t)*dt
        lt.append(t)
        ly.append(y)
    return lt, ly
```

1.2 Semi-dérivabilité

Définition. *On dit que f est dérivable à gauche en a si les taux d'accroissement admettent une limite à gauche finie :*

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

f est dérivable à droite en a si les taux d'accroissement admettent une limite à droite finie :

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

⊗ La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en tout point.

Proposition 1.2. *f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche et $f'(a^+) = f'(a^-)$.*

1.3 Extrémum local

Définition. *La fonction* <u>*f admet un maximum (resp. minimum) local*</u> *en* $c \in I$ *si il existe un voisinage* V_c *de* c *tel que :* $f(c) = \max_{V_c \cap I} f$ *(resp.* $f(c) = \min_{V_c \cap I} f$*).*

Proposition 1.3. *Si* f *est dérivable en* $c \in I$ *et admet un maximum local en* c *alors* $f'(c) = 0$.

⊗ Un point $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$ s'appelle un <u>point critique</u> de la fonction.
⊗ La réciproque est fausse avec par exemple $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 mais n'atteint pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4 (de Rolle)**.** *Si* f *est une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *telle que* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

1.4 Les accroissements finis

Théorème 1.5 (des accroissements finis)**.** *Si* f *est continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *alors :*

$$\text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5}$$

Théorème 1.6. *Si* f *est continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *et si* f' *est bornée sur* $]a, b[$ *alors :*

$$\inf_{]a,b[} |f'| \leq \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq \sup_{]a,b[} |f'|. \tag{6}$$

1.5 Fonctions lipschitziennes

Définition. *Soit* $M \in \mathbb{R}_+$*. On dit que* <u>*f est M-lipschitzienne*</u> *sur* I *si :*

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{7}$$

De plus si $M < 1$*, on dit que* f *est* <u>*M-contractante*</u>*.*

Proposition 1.7. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

a) *Si* f *est* M*-lipschitzienne alors* f *est continue sur* I*.*
b) *Si* f *est dérivable sur* I *et* f' *est bornée alors* f *est* $\sup_I |f'|$*-lipschitzienne.*

⊗ Les fonctions $t \mapsto \sin(t)$, $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \text{Arctan}\,(t)$ sont 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
⊗ La fonction $t \mapsto \sqrt{1 + t}$ est $(1/2)$-contractante sur $\mathbb{R}_+$.
⊗ Si f est contractante alors les suites autonomes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ tendent vers un unique point fixe de la fonction.

1.6 Monotonie et dérivée

<u>Rappel</u> : On dit que f est croissante sur I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
De même, f est strictement croissante sur I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Théorème 1.8. *Si* f *est dérivable sur* I*.*

a) $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* I*.*
b) $f' > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante sur* I*.*
c) $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* I*.*
d) $f' < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante sur* I*.*

⊗ La fonction $x \mapsto x^3$ fournit un exemple de fonction strictement croissante dont la dérivée s'annule.

Théorème 1.9 (Prolongement de la dérivabilité)**.** *Si* f *est continue sur* I *et dérivable sur* $I - \{a\}$ *et si* $\lim_a f' = l$ *existe et est finie alors* f *est dérivable en* a *et* $f'(a) = l$.

⊗ Si $\lim_a f'$ existe et est infinie alors la fonction n'est pas dérivable en a et la courbe admet une tangente verticale au point a.

1.7 Fonctions convexes

Définition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{8}$$

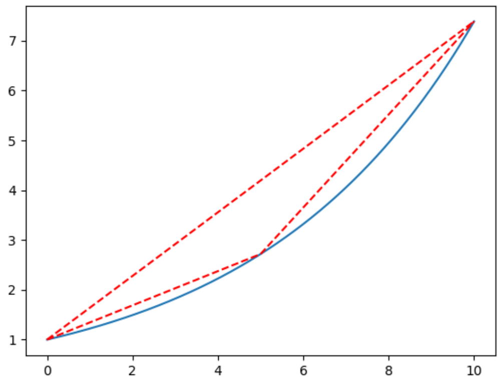
⊗ Le point $m = \lambda a + (1-\lambda)b$ est la moyenne pondérée entre a et b.
f est convexe ssi l'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images.

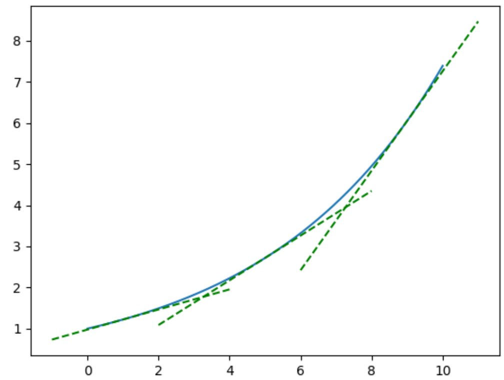
Proposition 1.10 (Inégalité des trois pentes)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*
f est convexe ssi pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

⊗ On peut reformuler la croissance sous la forme :

$$\text{Pour } a < b < c \text{ on a } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{b-c}.$$

Proposition 1.11. *On suppose que f est convexe.*
Alors f est continue sur I et la courbe est sous la corde.
Si de plus f est dérivable en a alors la courbe est au dessus de sa tangente.





Théorème 1.12. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur I alors on a l'équivalence :*

$$f \text{ est convexe sur } I \text{ ssi } f'' \geq 0. \tag{9}$$

2 Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Rappel : $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I ssi $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables sur I.

$$\text{Pour tout } x \in I, f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x). \tag{10}$$

⊗ Les résultats liés à la monotonie ou à une majoration n'ont pas de sens sur $\mathbb{C}$.
⊗ L'égalité du TAF est fausse avec par exemple $t \mapsto e^{it}$ qui contredirait le Théorème de Rolle.

Théorème 2.1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I et f' est bornée sur I alors pour tout $a \neq b \in I$:*

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq \sup_I |f'|. \tag{11}$$