Chapitre 11 : Analyse asymptotique

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 Comparaison sur les fonctions

On considère dans cette partie des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On étudie le comportement au voisinage d'un point $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$ l'adhérence de I.

1.1 Introduction

Définition. *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a.*

a) *On dit que f est équivalent à g en a et on note $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 1$.*

b) *On dit que f est négligeable devant g en a et on note $f(x) =_{x\to a} o\left(g(x)\right)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 0$.*

c) *On dit que f est dominée par g en a et on note $f(x) =_{x\to a} O\left(g(x)\right)$ si la fonction f/g est bornée sur un voisinage de a.*

⊗ L'équivalence des fonctions est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
⊗ Le caractère négligeable est une relation transitive mais non réflexive sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Théorème 1.1. *Soit f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de a.*

a) *Si $f > 0$ sur un voisinage de a alors $g > 0$ sur un voisinage de a.*

b) *Si $f(x) \to_{x\to a} l$ alors $g(x) \to_{x\to a} l$.*

Proposition 1.2. *On dispose des liens entre les relations de comparaison :*

a) *Si $f(x) =_{x\to a} o(g(x))$ alors $f(x) =_{x\to a} O(g(x))$.*

b) *Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ alors $f(x) =_{x\to a} O(g(x))$.*

c) *On a l'équivalence : $f(x) \sim_{x\to a} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) =_{x\to a} o(g(x))$.*

Proposition 1.3. *On dispose des comparaisons de références dans une même classe :*

$$\ln^{\alpha_1}(x) =_{+\infty} o(\ln^{\alpha_2}(x)) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \tag{1}$$
$$x^{\beta_1} =_{+\infty} o(x^{\beta_2}) \Leftrightarrow \beta_1 < \beta_2 \tag{2}$$
$$e^{\gamma_1 x} =_{+\infty} o(e^{\gamma_2 x}) \Leftrightarrow \gamma_1 < \gamma_2 \tag{3}$$

On dispose des relations de croissances comparées entre les classes :

$$\ln^{\alpha_1}(x) =_{+\infty} o(x^{\beta}) \ si\ \beta > 0 \tag{4}$$
$$x^{\beta} =_{+\infty} o(e^{\gamma x}) \ si\ \gamma > 0 \tag{5}$$

⊗ On peut ramener ces relations au voisinage de 0 et on a alors :

$$x^{\beta_1} =_{x\to 0} o(x^{\beta_2}) \Leftrightarrow \beta_1 > \beta_2 \text{ et } \ln^{\alpha}(x) =_{x\to 0} o(x^{\beta}) \text{ si } \beta < 0. \tag{6}$$

Proposition 1.4. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $f \leq g \leq h$ et $f(x) \sim_{x\to a} h(x)$ alors $g(x) \sim_{x\to a} f(x)$.*

1.2 Opérations

Proposition 1.5. *Si* $f(x) =_{x\to a} o(h(x))$ *et* $g(x) =_{x\to a} o(h(x))$ *alors :*
pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda f(x) + \mu g(x) =_{x\to a} o(h(x))$.

Proposition 1.6. *On dispose de la comparaison des produits :*
Si $f_1(x) \sim_{x\to a} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \sim_{x\to a} g_2(x)$ *alors* $f_1(x)f_2(x) \sim_{x\to a} g_1(x)g_2(x)$.
Si $f_1(x) =_{x\to a} o(g_1(x))$ *et* $f_2(x) =_{x\to a} O(g_2(x))$ *alors* $f_1(x)f_2(x) =_{x\to a} o(g_1(x)g_2(x))$.
Si $f_1(x) =_{x\to a} O(g_1(x))$ *et* $f_2(x) =_{x\to a} O(g_2(x))$ *alors* $f_1(x)f_2(x) =_{x\to a} O(g_1(x)g_2(x))$.

Proposition 1.7. *On dispose de la comparaison des inverses :*
On a : $f(x) \sim_{x\to a} g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \sim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$.
On a : $f(x) =_{x\to a} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} =_{x\to a} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.
On a : $f(x) =_{x\to a} O(g(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} =_{x\to a} O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

$\otimes$ On peut en déduire des comparaisons pour les quotients.

Proposition 1.8. *On dispose de la comparaison des puissances* $\alpha > 0$ *:*
On a : $f(x) \sim_{x\to a} g(x) \Leftrightarrow f^\alpha(x) \sim_{x\to a} g^\alpha(x)$.
On a : $f(x) =_{x\to a} o(g(x)) \Leftrightarrow f^\alpha(x) =_{x\to a} o\left(g^\alpha(x)\right)$.
On a : $f(x) =_{x\to a} O(g(x)) \Leftrightarrow f^\alpha(x) =_{x\to a} O\left(g^\alpha(x)\right)$.

$\otimes$ On peut en déduire le passage à une puissance négative.
$\otimes$ Ces règles sont valables uniquement dans le cas où la puissance est une constante.
Par exemple, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to_{+\infty} e$ et n'est pas équivalent à $1^x = 1$.

2 Développements limités

On étudie une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ au voisinage d'un point fini a dans l'adhérence de I. Soit $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Généralités

Définition. *On dit que* f *admet* <u>*un développement limité à l'ordre* n *en* a</u> *si :*

$$f(x) =_{x\to a} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + o(x-a)^n, \tag{7}$$

avec $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *des coefficients.*

$\otimes$ On notera $P(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$ la partie polynomiale et le développement s'écrit :

$$DL_n(a): \quad f(a+h) =_{h\to 0} P(h) + o(h^n). \tag{8}$$

Le degré de P correspond au plus grand indice $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ vérifie $\deg(P) \leq n$ <u>l'ordre</u> du développement limité.

Théorème 2.1. *Si il existe le développement limité est unique.*

Proposition 2.2 (Troncature)**.** *Si* f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* a *alors il admet des développements à chacun des ordres inférieurs* $p < n$.

$\otimes$ Le plus petit indice $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ s'appelle la <u>valuation</u> du développement. Cet entier $p \leq n$ est unique et vérifie :

$$f(a+h) =_{h\to 0} a_p h^p + ... + a_n h^n + o(h^n), \tag{9}$$

avec $a_p \neq 0$. En particulier, on obtient l'équivalence $f(x) \sim_{x\to a} a_p(x-a)^p$.

2.2 Opérations

Proposition 2.3. *Si* $f_1(a+h) =_{h\to 0} P_1(h) + o(h^n)$ *et* $f_2(a+h) =_{h\to 0} P_2(h) + o(h^n)$ *sont des développements limités à l'ordre* n *alors pour tous les scalaires* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$*, la combinaison linéaire* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *admet un développement limité à l'ordre* n *donné par :*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(a+h) =_{h\to 0} \lambda_1 P_1(h) + \lambda_2 P_2(h) + o(h^n). \tag{10}$$

Proposition 2.4. *Si* $f_1(a+h) =_{h\to 0} P_1(h) + o(h^{n_1})$ *et* $f_2(a+h) =_{h\to 0} P_2(h) + o(h^{n_2})$ *sont des développements limités à l'ordre* n_1 *respectivement* n_2 *et de valuation* p_1 *respectivement* p_2 *alors le produit admet un développement limité à l'ordre* $n = \min(n_1 + p_2, n_2 + p_1)$ *donné par :*

$$(f_1 f_2)(a+h) =_{h\to 0} P_1(h) P_2(h) + o(h^n). \tag{11}$$

⊗ Ceci permet de déduire le quotient à l'aide de $\frac{1}{1-u} =_{u\to 0} \sum_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)$.

Proposition 2.5. *Si* f *est de classe* C^1 *au voisinage de* a *et que* f' *admet un développement limité à l'ordre* n *en* a *de la forme :*

$$f'(a+h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + ... + b_n h^n + o(h^n)$$

alors f *admet un développement limité à l'ordre* $n+1$ *en* a *donné par :*

$$f(a+h) = f(a) + b_0 h + b_1 \frac{h^2}{2} + b_2 \frac{h^3}{3} + ... + b_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1}).$$

2.3 Lien entre classe et développement limité

Théorème 2.6 (Taylor-Young)**.** *Si* f *est de classe* C^n *au voisinage de* a *alors* f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* a *donné par :*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n). \tag{12}$$

⊗ Réciproquement si f est de classe C^n au voisinage de a et :

$$DL_n(a) \quad f(a+h) =_{h\to 0} a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n).$$

alors par unicité, on obtient $f^{(k)}(a) = k! a_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
⊗ On obtient une technique pour trouver les équations de tangentes ou d'asymptotes mais également leurs positions relatives à la courbe.

2.4 Développements limités usuels en 0

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x} =_{x\to 0} 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n),\\
&\exp(x) =_{x\to 0} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
&\cos(x) =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\\
&\sin(x) =_{x\to 0} x - \frac{x^3}{6} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),\\
&\ln(1+x) =_{x\to 0} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),\\
&(1+x)^\alpha =_{x\to 0} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\\
&\operatorname{Arctan}(x) =_{x\to 0} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}),\\
&\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).
\end{aligned}$$