Chapitre 12 : Espaces vectoriels

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.

1 Structure d'un espace vectoriel

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition. *On dit que E est muni d'une addition interne si on dispose d'une correspondance :*

$$E \times E \to E, (u, v) \mapsto u + v \tag{1}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Elément neutre : Il existe un vecteur nul $0_E \in E$ tel que $\forall u \in E, u + 0_E = u$.
Commutative : Pour tout $u, v \in E, u + v = v + u$.
Associative : Pour tout $u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$.
Opposable : Pour tout $u \in E$, il existe $-u \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$.

Définition. *On dit que E est muni d'un produit externe compatible à l'addition si on dispose d'une correspondance :*

$$\mathbb{K} \times E \to E, (\lambda, u) \mapsto \lambda.u, \tag{2}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Eléments neutres : Pour tout $u \in E$, on a : $0_{\mathbb{K}}.u = 0_E$ et $1_{\mathbb{K}}.u = u$.
Associative : Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E, (\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$.
Distributifs : Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $u \in E, (\lambda_1 + \lambda_2).u = \lambda_1.u + \lambda_2.u$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u_1, u_2 \in E, \lambda.(u_1 + u_2) = \lambda.u_1 + \lambda.u_2$.

Définition. *On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :*

- *E est non-vide ($0_E \in E$).*
- *E est muni d'une addition interne.*
- *E est muni d'un produit externe compatible à l'addition.*

⊗ Ces deux opérations permettent de considérer les combinaisons linéaires.

1.2 Exemples de référence

1.2.1 Structures géométriques

Proposition 1.1. *L'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
L'ensemble $\vec{E}$ des vecteurs de l'espace muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda. \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

⊗ En particulier, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.2.2 Structures analytiques

Proposition 1.3. *L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des opérations :*

$$(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0} \text{ et } \lambda.(u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0} \tag{4}$$

Le vecteur nul est la suite constante nulle.

Proposition 1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des opérations :*

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \text{ et } (\lambda.f)(t) = \lambda f(t). \tag{5}$$

Le vecteur nul est la fonction constante nulle.

1.2.3 Structures algébriques

Proposition 1.5. *L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des opérations :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n \text{ et } \lambda. \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda a_n) X^n. \tag{6}$$

Le vecteur nul est le polynôme nul.

Proposition 1.6. *L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des opérations :*

$$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \text{ et } \lambda.\,(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}. \tag{7}$$

Le vecteur nul est la matrice nulle.

Proposition 1.7. *Le corps des complexes $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni des opérations usuelles. Le vecteur nul est le nombre 0.*

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition. *On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel d'un espace vectoriel E si $F \subset E$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des opérations induites.*

Proposition 2.1. *Soit F une partie de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ssi F est non-vide et stable par combinaison linéaire.*

$\otimes$ Il suffit de plonger F dans un espace de référence E et de démontrer les deux propriétés :

Non-vide : Il existe un vecteur dans F (en particulier, on a $0_E \in F$).

Stable par combinaison linéaire : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$, on a $u + \lambda v \in F$.

Définition. *Pour une famille de vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ d'un espace vectoriel E, l'espace engendré par la famille est défini par :*

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, ..., e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ pour } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \tag{8}$$

En particulier, les espaces engendrés sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Proposition 2.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1, ..., e_n \in E$ alors le sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, ..., e_n)$ est inclus dans F, i.e. $e_1, ..., e_n \in F \Rightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, ..., e_n) \subset F$.*

2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 2.3. *Pour deux sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on dispose des opérations :*

Intersection : $F_1 \cap F_2 = \{u \in E$ tel que $u \in F_1$ et $u \in F_2\}$.

Somme : $F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2$ pour $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2\}$.

Les ensembles $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$ sont des sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.

⊗ Pour des sous-espaces vectoriels F, F_1 et F_2 de E, on a les inclusions suivantes.
Si $F \subset F_1$ et $F \subset F_2$ alors $F \subset F_1 \cap F_2$.
Si $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ alors $F_1 + F_2 \subset F$.

Définition. *On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si pour tout $u \in F_1 + F_2$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.*
Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$ la somme des deux espaces.
On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si ils sont en somme directe et vérifie $F_1 \oplus F_2 = E$.

Proposition 2.4. *Deux espaces F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

3 Familles de vecteurs

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

3.1 Famille libre

Définition. *On dit qu'une famille de vecteurs $(u_1, ..., u_n)$ est libre si :*

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \right). \tag{9}$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

⊗ Si deux vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont colinéaires.
⊗ Si trois vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont coplanaires.
⊗ Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.

Proposition 3.1. *Lorsque $E = \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une famille de polynômes non nuls $(P_1, ..., P_n)$ est échelonnée en degré si :*

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < ... < \deg(P_n). \tag{10}$$

En particulier, les familles échelonnées en degré sont des familles libres.

⊗ La réciproque est fausse. La famille $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$ est libre mais pas échelonnée.

3.2 Famille génératrice d'un espace

Définition. *On dit qu'une famille de vecteurs $(u_1, ..., u_n)$ engendre E si :*

$$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i. \tag{11}$$

En particulier, on peut écrire $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, ..., u_n)$.

⊗ Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

Définition. *On dit que E est de dimension finie si il admet une famille finie génératrice. Sinon on dit que E est de dimension infinie.*

⊗ $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sont des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie.
⊗ $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie mais $\mathbb{K}_n[X]$ est engendré par $(1, X, X^2, ..., X^n)$ et est un sous-espace de dimension finie.

3.3 Base d'un espace

Définition. *On dit qu'une famille* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E *si la famille est à la fois libre et génératrice dans* E*.*
Dans ce cas, on dispose de l'assertion :

$$\forall v \in E, \exists !(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i. \tag{12}$$

Donc tout vecteur se décompose de manière unique dans la base et on note $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

⊗ Chacun des espaces vectoriels de référence de dimension finie dispose d'une base canonique.

Théorème 3.2. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces en somme directe. Si on dispose d'une base* $\mathcal{B}_1 = (u_1, ..., u_{n_1})$ *de* F_1 *et d'une base* $\mathcal{B}_2 = (v_1, ..., v_{n_2})$ *de* F_2*. Alors* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (u_1, ..., u_{n_1}, v_1, ..., v_{n_2})$ *est une base de* $F_1 \oplus F_2$*.*

Proposition 3.3. *Réciproquement si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E*. Alors pour tout entier* $1 \leq k < n$*, les sous-espaces* $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, ..., e_k)$ *et* $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_{k+1}, ..., e_n)$ *sont supplémentaires dans* E*.*

⊗ En particulier, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on peut écrire :

$$E = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, ..., e_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_i). \tag{13}$$