Chapitre 15 : Dénombrement

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Définition. *Soit A un ensemble non vide et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est de <u>cardinal</u> n s'il existe une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \to A$. Dans ce cas, on note $n = \mathrm{Card}\,(A) = |A|$.*

1 Opérations sur les ensembles

Proposition 1.1. *Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E.*

- **a)** *Si A et B sont disjoints alors $\mathrm{Card}\,(A \uplus B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$.*
- **b)** *Si $B \subset A$ alors $\mathrm{Card}\,(A \setminus B) = \mathrm{Card}\,(A) - \mathrm{Card}\,(B)$.*
- **c)** *On a : $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$.*

Proposition 1.2. *Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis.*

- **a)** *On a : $\mathrm{Card}\,(E_1 \times E_2) = \mathrm{Card}\,(E_1)\mathrm{Card}\,(E_2)$.*
- **b)** *On a : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F}(E_1, E_2)) = \mathrm{Card}\,(E_2)^{\mathrm{Card}\,(E_1)}$.*
- **c)** *On a : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(E_1)) = 2^{\mathrm{Card}\,(E_1)}$.*

2 Propriétés des ensembles et applications

Proposition 2.1. *Pour deux ensembles A_1 et A_2 de cardinal fini.*
On a $A_1 = A_2$ ssi deux des trois propriétés sont vérifiées :

- **(i)** *$A_1 \subset A_2$.*
- **(ii)** *$A_2 \subset A_1$.*
- **(iii)** *$\mathrm{Card}\,(A_1) = \mathrm{Card}\,(A_2)$.*

Proposition 2.2. *Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles finis.*

- **a)** *Si f est injective alors $\mathrm{Card}\,(A) \leq \mathrm{Card}\,(B)$.*
- **b)** *Si f est surjective alors $\mathrm{Card}\,(A) \geq \mathrm{Card}\,(B)$.*

Théorème 2.3. *Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles finis.*
L'application f est bijective ssi deux des trois propriétés sont vérifiées :

- **(i)** *f est injective.*
- **(ii)** *f est surjective.*
- **(iii)** *$\mathrm{Card}\,(A) = \mathrm{Card}\,(B)$.*

3 Listes et Combinaisons

Définition. *On dénombre l'ensemble des listes de p éléments distincts parmi n éléments et on appelle <u>nombre d'arrangements</u> :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \mathrm{Card}\,\{(a_1, ..., a_p) \text{ pour } a_k \in [\![1, n]\!] \text{ 2 à 2 distincts}\}. \tag{1}$$

On dénombre l'ensemble des parties de p éléments parmi n éléments et on appelle <u>nombre de combinaisons</u> :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}_p([\![1, n]\!])), \tag{2}$$

avec $\mathcal{P}_k(E) = \{A \text{ tel que } A \subset E \text{ et } \mathrm{Card}\,(A) = k\}$ est l'ensemble des parties de E de cardinal k.

Proposition 3.1. *Soient A et B deux ensembles finis avec* $\mathrm{Card}\,(A) = p$ *et* $\mathrm{Card}\,(B) = n$.
Le nombre d'injections de A vers B est le nombre d'arrangement A_n^p.

$\otimes$ En particulier, le nombre de bijections entre deux ensembles de n éléments est $A_n^n = n!$. Ceci correspond au nombre de permutations de n éléments.

Théorème 3.2. *La définition combinatoire des coefficients binomiaux permettent de justifier :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(Formule du Binôme de Newton)}$$

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \qquad \text{(Formule de symétrie)}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \text{(Formule du Triangle de Pascal)}$$