Chapitre 16 : Probabilités

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

1 Espaces probabilisés finis

Définition. *L'ensemble Ω des issues (ou aléas) d'une expérience aléatoire est appelé univers.*
Une partie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un évènement.
On munit l'univers Ω d'une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ appelée loi de probabilité qui associe à tout évènement sa fréquence de réalisation et vérifie :

- *La loi est unitaire : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.*
- *La loi est additive : Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.*

On dit que le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Proposition 1.1. *Tout univers fini Ω peut être muni de l'équiprobabilité définie par :*

$$\text{Pour tout évènement } A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)}. \tag{1}$$

Définition. *On dispose des transcriptions des notions ensemblistes dans le vocabulaire probabiliste.*
L'ensemble vide $\emptyset$ s'appelle l'évènement impossible.
Les singletons $\{\omega\}$ s'appellent des évènements élémentaires.
Le complémentaire $\bar{A}$ s'appelle l'évènement contraire.
L'intersection $A \cap B$ s'appelle l'évènement 'A et B'.
L'union $A \cup B$ s'appelle l'évènement 'A ou B'.
On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$ (i.e. si ils sont disjoints).
On dit que $A_1, ..., A_n$ forment un système complet d'évènements incompatibles si ils forment une partition de Ω.

$\otimes$ Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A et $\bar{A}$ forment un système complet d'évènements incompatibles.

Proposition 1.2. *On dispose des formules :*

a) *(Croissance) Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
b) *Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.*
c) *Pour $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

Proposition 1.3. *Dans un espace probabilisé fini, toute loi de probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée par sa restriction aux évènements élémentaires. La donnée de $p : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \mathbb{P}\{\omega\}$ sous l'unique condition d'être unitaire $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = 1$ permet de construire $\mathbb{P}$ via :*

$$\text{Pour tout évènement } A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}\{\omega\}. \tag{2}$$

Définition. *Pour modéliser une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité d'un Succès $p \in [0,1]$, on peut définir $\Omega = \{0,1\}^n$. Un aléa $\omega = (b_1, ..., b_n)$ traduit la succession par $b_k = 1$ ssi la k-ième expérience est un succès. On peut définir :*

$$\mathbb{P}\{(b_1, ..., b_n)\} = p^k (1-p)^{n-k} \text{ avec } k = \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ le nombre total de succès de l'aléa.} \tag{3}$$

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Les formules des probabilités conditionnelles

Définition. *Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.*
On définit la probabilité de A sachant B et on note :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{4}$$

Proposition 2.1. *Pour un évènement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application :*
$\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une loi de probabilité sur Ω.

Proposition 2.2 (Formule des probabilités composées)**.** *Pour deux évènements $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilités non nulles, on a :*

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2). \tag{5}$$

Pour n évènements $B_1, ..., B_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap ... \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)...\mathbb{P}_{B_1 \cap ... \cap B_{n-1}}(B_n) = \Pi_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{\cap_{i<k}B_i}(B_k). \tag{6}$$

Proposition 2.3 (Formule des probabilités totales)**.** *Soient $A_1, ..., A_n$ un système complet d'évènements incompatibles de probabilités non nulles. Pour tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B). \tag{7}$$

Proposition 2.4 (Formules de Bayes)**.** *Pour deux évènements A et B de probabilités non nulles :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{8}$$

Pour $A_1, ..., A_n$ un système complet d'évènements incompatibles de probabilités non nulles. Pour tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}. \tag{9}$$

2.2 Indépendances des évènements

Définition. *Soient A et B deux évènements.*
On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Soient $A_1, ..., A_n$ une famille d'évènements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toutes sous-familles $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Proposition 2.5. *Si A et B sont indépendants alors $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.*

$\otimes$ Si A et B sont indépendants alors les évènements contraires sont également indépendants

Proposition 2.6. *Si $A_1, ..., A_n$ sont une famille d'évènements mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.*

$\otimes$ La réciproque est fausse. Par exemple, pour le lancé de deux dés équilibrés D_1 et D_2. Les évènements suivants sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendant :

$$A = \{D_1 \text{ est pair}\}, B = \{D_2 \text{ est pair}\} \text{ et } C = \{D_1 + D_2 \text{ est impair}\}.$$

On a : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$ mais $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.