Chapitre 17 : Variables aléatoires

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1 Définition et exemples

Définition. *On appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble E toute application $X : \Omega \to E$.*
Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.
L'ensemble image $X(\Omega) \subset E$ s'appelle l'univers de X, un élément $x \in X(\Omega)$ est un aléa de X et une partie $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ est un évènement suivant X.

Proposition 1.1. *Soit $X : \Omega \to X(\Omega)$ une variable aléatoire sur Ω.*
On définit l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$ avec :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in A\}. \tag{1}$$

Le couple $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ forme un espace probabilisé fini.

$\otimes$ Pour un aléa $x \in X(\Omega)$, on définit $\mathbb{P}_X\{x\} = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}$.

Définition. *On dispose des trois lois de références :*

a) *On dit que $X : \Omega \to \{0,1\}$ suit une loi de Bernoulli et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :*

$$X(\Omega) = \{0,1\}, \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p. \tag{2}$$

b) *On dit que $X : \Omega \to X(\Omega)$ suit une loi uniforme et on note $X \sim \mathcal{U}(X(\Omega))$ si :*

$$\operatorname{Card}(X(\Omega)) = n \text{ et pour tout } x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}. \tag{3}$$

c) *On dit que $X : \Omega \to [\![0, n]\!]$ suit une loi binomiale et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :*

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{4}$$

$\otimes$ On dit qu'une variable aléatoire est constante si :
il existe une valeur $x_0 \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$, on dit que $X = x_0$ presque sûrement.
$\otimes$ Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'indicatrice $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Définition. *Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : E \to F$ une application.*
On définit la variable aléatoire $f(X)$ comme étant la composée $f \circ X : \Omega \to F$.

2 Espérance

Définition. *Pour une variable aléatoire réelle X, on définit son espérance et on note :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\{\omega\} X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x. \tag{5}$$

⊗ Elle représente la moyenne des aléas pondérées par leurs probabilités.
⊗ L'espérance d'une variable aléatoire constante est la valeur atteinte presque sûrement.

Proposition 2.1. *Si* $X \sim \mathcal{B}(p)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = p$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = np$.
Si $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ *alors* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

⊗ En particulier, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 2.2. *Pour deux variables aléatoire* X *et* Y *réelles, on a :*

$$\text{Pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y). \qquad \text{(Linéarité de l'espérance)}$$

$$\text{Si } X \leq Y \text{ presque sûrement alors } \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y). \qquad \text{(Croissance de l'espérance)}$$

Théorème 2.3 (Théorème de Transfert). *Pour* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction, on a :*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x). \tag{6}$$

⊗ En particulier, on définit les moments d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de X comme étant :

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x^k.$$

3 Variables aléatoires indépendantes

3.1 Couples de variables aléatoires

Définition. *Soient* $X : \Omega \to E$ *et* $Y : \Omega \to F$ *deux variables aléatoires. On définit le couple* $(X,Y) : \Omega \to E \times F$ *par la correspondance :*

$$\text{Pour tout aléa } \omega \in \Omega, (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)). \tag{7}$$

Considérons des aléas $x \in X(\Omega)$ *et* $y \in Y(\Omega)$*. On définit la loi conjointe du couple par :*

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\} = \mathbb{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right), \tag{8}$$

les lois marginales du couple sont données par :

$$\mathbb{P}_X\{x\} = \mathbb{P}(X = x) \text{ et } \mathbb{P}_Y\{y\} = \mathbb{P}(Y = y). \tag{9}$$

Proposition 3.1. *La loi du couple permet de reconstruire les deux lois marginales par :*

$$\text{Pour tout } x_0 \in X(\Omega), \mathbb{P}_X\{x_0\} = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x_0, y)\}, \tag{10}$$

$$\text{Pour tout } y_0 \in Y(\Omega), \mathbb{P}_Y\{y_0\} = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x, y_0)\}. \tag{11}$$

3.2 Indépendance d'un couple

Définition. *Soient deux variables aléatoires* X *et* Y *sur* Ω.
Pour un aléa $x_0 \in X(\Omega)$*, on définit la loi conditionnelle de* Y *sachant* $(X = x_0)$ *par :*

$$\mathbb{P}_{Y|X=x_0}(B) = \mathbb{P}(Y \in B | X = x_0) = \frac{\mathbb{P}\left((X = x_0) \cap (Y \in B)\right)}{\mathbb{P}(X = x_0)}. \tag{12}$$

Pour un évènement $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$*, on définit la loi conditionnelle de* Y *sachant* $(X \in A)$ *par :*

$$\mathbb{P}_{Y|X\in A}(B) = \mathbb{P}(Y \in B | X \in A) = \frac{\mathbb{P}\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right)}{\mathbb{P}(X \in A)}. \tag{13}$$

On dit que X *et* Y *sont indépendantes et on note* $X \perp\!\!\!\perp Y$ *si ces lois conditionnelles sont la loi* $\mathbb{P}_Y$.

$\otimes$ On définit de manière symétrique la loi conditionnelle de X sachant un aléa ou un évènement suivant Y.

Proposition 3.2. *Les variables X et Y sont indépendantes ssi on dispose d'une des propriétés :*

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\} = \mathbb{P}_X\{x\}\mathbb{P}_Y\{y\}. \tag{14}$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)), \mathbb{P}\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B). \tag{15}$$

Théorème 3.3. *Si X et Y sont deux variables indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Proposition 3.4. *Soient f et g deux applications et X et Y deux variables aléatoires indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

3.3 Indépendance mutuelle d'une famille

Définition. *Soient $X_1, ..., X_n$ une famille de variables aléatoires.*
On dit que les variables sont mutuellement indépendantes si pour toutes familles d'évènements :
$A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), A_2 \in \mathcal{P}(X_2(\Omega)), ...$ et $A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in A_i). \tag{16}$$

$\otimes$ Toute sous-famille d'une famille mutuellement indépendante est encore mutuellement indépendantes.

Proposition 3.5. *Une famille $X_1, ..., X_n$ est mutuellement indépendante ssi : :*
pour tout aléa $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i). \tag{17}$$

Lemme 3.6. *(des coalitions) Si $X_1, .., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors $f(X_1, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.*

Théorème 3.7. *Soient $X_1, ..., X_n$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une même loi de Bernoulli $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ alors $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $S \sim \mathcal{B}(n,p)$.*

4 Variance, Ecart type et Covariance

Définition. *Pour une variable aléatoire réelle X, on définit la variance notée $\mathbb{V}(X)$ par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right). \tag{Variance}$$

De plus, on appelle écart type le nombre $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

$\otimes$ Pour toute variable X, $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

Proposition 4.1. *On dispose de la formule de Koenig-Huygens :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \tag{18}$$

Proposition 4.2. *On dispose des formules de référence :*

- **a)** *Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.*
- **b)** *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.*
- **c)** *Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*

Proposition 4.3. *On dispose des propriétés suivantes :*

a) *Pour toute variable X, si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire constante.*

b) *Pour toute variable X et des coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X). \tag{19}$$

$\otimes$ En particulier, si $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ et $n = b - a + 1$ alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Définition. *On dit que X est* <u>*centrée*</u> *si $\mathbb{E}(X) = 0$.*
On dit que X est <u>*réduite*</u> *si $\mathbb{V}(X) = 1$.*

$\otimes$ Si X est une variable aléatoire non constante alors $X_0 = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Définition. *Pour deux variables aléatoires X et Y réelles, on définit leurs covariances par :*

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]. \tag{20}$$

Si $Cov(X, Y) = 0$ alors on dit que X et Y sont <u>*décorrélées*</u>.

Proposition 4.4. *On a : $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*
Si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont décorrélées.
On a : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2Cov(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$

$\otimes$ La covariance est symétrique et bilinéaire et on a $Cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

Théorème 4.5 (Pythagore)**.** *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors :*

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y). \tag{21}$$

Théorème 4.6 (Inégalité de Markov)**.** *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire positive.*
Pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

$\otimes$ Si on recherche les valeurs qui sont supérieures à 10 fois l'espérance, la formule donne que ces valeurs sont moins d'un sur dix. Avec $\lambda = 10\mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}(X \geq 10\mathbb{E}(X)) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{10\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{10}$.

Théorème 4.7 (Bienaymé-Tchebichev)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle et $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = \left(\frac{\sigma(X)}{\varepsilon}\right)^2. \tag{22}$$

$\otimes$ La formule permet de quantifier la rareté des valeurs hors des intervalles $[\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon]$ c'est à dire les voisinages de l'espérance. Dans la pratique, on prend ε étant un multiple de l'écart type $\sigma(X)$.
$\otimes$ Ceci permet dans déduire la loi faible des grands nombres.

Pour X une variable aléatoires réelles quelconques, on considère $X_1, ..., X_n$ des copies mutuellement indépendantes de X et on pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ leur moyenne.

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \to_{n \to +\infty} 0. \tag{23}$$

Ceci signifie que la variable aléatoire M_n tend vers la constante $\mathbb{E}(X)$ lorsque n est grand.