

Chapitre 18 : Matrices et applications linéaires

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.

1 Noyau et image d'une matrice

Définition. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit l'application canoniquement associée à A par :

$$f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto AX. \quad (1)$$

En particulier, $f_A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est une application $\mathbb{K}$ -linéaire.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle noyau d'une matrice A et on note $\text{Ker}A$, le noyau de f_A :

$$\text{Ker}A = \{X \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } AX = 0_n\}. \quad (2)$$

On appelle image d'une matrice A et on note $\text{Im}A$, l'image de f_A :

$$\text{Im}A = \{AX \text{ pour } X \in \mathbb{K}^p\}. \quad (3)$$

⊗ La différentes notions de rang de la matrice reste cohérente.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}A. \quad (4)$$

Théorème 1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On a :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{Im}A = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0_n\} \Leftrightarrow \text{rg}A = n. \quad (5)$$

2 Matrice d'une application linéaire

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Pour toute application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, on lui associe sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ comme étant la matrice des coordonnées dans $\mathcal{B}_F$ des vecteurs de $\varphi(\mathcal{B}_E)$ i.e. définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) = (\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } \varphi(e_j) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} f_i. \quad (6)$$

⊗ Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Si $\mathcal{B}_p$ (resp. $\mathcal{B}_n$) est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$) alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(f_A) = A$.

⊗ Les applications coordonnées des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ définies par :

$$C_{\mathcal{B}_E} : \mathbb{K}^p \rightarrow E, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mapsto \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j \text{ et } C_{\mathcal{B}_F} : \mathbb{K}^n \rightarrow F, (\beta_1, \dots, \beta_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \quad (7)$$

sont des isomorphismes qui donne le lien $\varphi = C_{\mathcal{B}_F} \circ \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \circ C_{\mathcal{B}_E}^{-1}$.

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ est ici assimilée à son application linéaire canoniquement associée.

Théorème 2.1. *L'application $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ est un isomorphisme. En particulier, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = (\dim_{\mathbb{K}} E) \times (\dim_{\mathbb{K}} F)$.*

Proposition 2.2. *Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires entre des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.*

Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives des espaces E, F et G . On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f). \quad (8)$$

⊗ En particulier, pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f)$. On en déduit des règles de calcul avec un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(P(f)) = P(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)). \quad (9)$$

Corollaire 2.3. *Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.*

L'application f est un isomorphisme ssi la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

3 Matrice de passage

Définition. *Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.*

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)$.

⊗ Les matrices de passage sont inversibles et on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(id_E). \quad (10)$$

Proposition 3.1. *Si E est muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors tout vecteur $u \in E$ se décompose de deux*

manières $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On dispose de la relation de passage :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(id_E) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Proposition 3.2. *Pour une application $f : E \rightarrow F$, si l'on dispose des deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de l'espace E et de deux bases $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ de l'espace F , alors on a la formule du changement de bases :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(id_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E) \quad (12)$$

⊗ Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on dispose dans la pratique d'une base canonique $\mathcal{B}_0$ et d'une base $\mathcal{B}_f$ adaptée à l'application f . On écrit la matrice de passage $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_f, \mathcal{B}_0}(id_E)$ des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_f$ dans la base canonique. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_f}(f)$ dispose d'une expression simple (i.e. matrice diagonale ou triangulaire) car la base est adaptée. On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}_f}(f) P^{-1}. \quad (13)$$