Chapitre 19 : Déterminants

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.
Soit E est un espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_n)$.

1 Définition et premiers exemples

Théorème 1.1. *Il existe une unique application* $\det_{\mathcal{B}_E} : E^n \to \mathbb{K}$ *vérifiant :*

<u>*multi-linéaire*</u> *Pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$ *et toutes familles de vecteurs* $x_1, ..., x_n \in E$, *l'application* $E \to \mathbb{K}, u_j \mapsto \det_{\mathcal{B}_E}(x_1, ..., u_j, ..., x_n)$ *est linéaire.*

<u>*alternée*</u> *Pour* $1 \leq i < j \leq n$ *et toutes familles* $x_1, ..., x_n \in E$, *on a :* $\det_{\mathcal{B}_E}(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -\det_{\mathcal{B}_E}(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$.

<u>*unitaire*</u> $\det_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}_E) = 1$.

Définition. *Pour* $E = \mathbb{K}^n$ *muni de la base canonique, on obtient l'application* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. *Elle est multi-linéaire et alternée par rapport aux colonnes et* $\det(I_n) = 1$.

⊗ Pour $n = 2$, on obtient $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

En considérant, $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \rho_2 \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires.
On a : $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2) = \rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$ ssi les vecteurs sont colinéaires.
⊗ Pour $n = 3$, on trouve $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 \wedge u_2).u_3$. Cette quantité est le volume orienté du parallélépipède de base u_1, u_2 et u_3. L'annulation est alors équivalente au caractère coplanaire des trois vecteurs.

Proposition 1.2 (Règle de Sarrus)**.** *Pour* $n = 3$, *on dispose de la formule :*

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2. \quad (1)$$

2 Techniques de calcul

2.1 Pivot de Gauss-Jordan

Proposition 2.1. *On peut effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice avec comme action :*

<u>*Transvection*</u> *Si* $A \sim_C A'$ *avec* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *alors* $\det(A) = \det(A')$.

<u>*Dilatation*</u> *Si* $A \sim_C A'$ *avec* $C_i \leftarrow \mu C_i$ *alors* $\det(A) = \frac{1}{\mu}\det(A')$.

<u>*Permutation*</u> *Si* $A \sim_C A'$ *avec* $C_i \leftrightarrow C_j$ *alors* $\det(A) = -\det(A')$.

⊗ En particulier, pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 2.2. *On peut calculer directement le déterminant d'une matrice triangulaire :*

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n} d_j = \det \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Corollaire 2.3. *On peut effectuer des opérations simultanément sur les lignes avec les mêmes actions. On a :* $\det({}^tA) = \det(A)$.

Théorème 2.4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a :* $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Théorème 2.5. *Pour deux matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition. *On définit* <u>*les mineurs d'ordre* $p < n$</u> *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *les déterminants extraits de taille* $p \times p$.
On appelle <u>*cofacteur*</u> *de rang* (i, j) *le mineur renormalisé d'ordre* $n - 1$ *:*

$$Cof_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det \left([A]_{k,l} \right)_{\substack{k \neq i \\ l \neq i}} . \tag{3}$$

On appelle <u>*comatrice*</u> *la matrice des cofacteurs et on note* $Com(A) = \left(Cof_{i,j}(A) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 2.6. *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :* $A\,{}^tCom(A) = (\det A) I_n$.

⊗ Ceci donne une formule explicite de l'inverse lorsque $\det(A) \neq 0$ par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$. Cette formule est dans la pratique trop calculatoire pour $n \geq 3$ et on préfère la méthode du pivot : $(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1})$ lors d'un calcul d'inverse.

Proposition 2.7. *On peut développer un déterminant par rapport à la* j*-ième colonne par :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j} \, Cof_{i,j}(A). \tag{4}$$

On peut développer un déterminant par rapport à la i*-ième ligne par :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j} \, Cof_{i,j}(A). \tag{5}$$

3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. *Soit* $f : E \to E$ *un endomorphisme. On définit le déterminant de* f *par :*

$$\det(f) = \det{}_{\mathcal{B}_E} \big(f(\mathcal{B}_E) \big) = \det \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E}(f). \tag{6}$$

⊗ Le déterminant ne dépend du choix de la base.

Proposition 3.1. *Un endomorphisme* $f : E \to E$ *est une automorphisme ssi* $\det(f) \neq 0$.
Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Proposition 3.2. *Le déterminant d'une composée est :* $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.

Proposition 3.3. *Soit* $\mathcal{B}_E$ *une base de* E *et* $\mathcal{F}$ *une famille quelconque de* n *vecteurs de* E.

a) *Si* f *est un endomorphisme alors* $\det_{\mathcal{B}_E} f(\mathcal{F}) = \det(f) \det_{\mathcal{B}_E} \mathcal{F}$.

b) *On a :* $\det_{\mathcal{B}_E} \mathcal{F} \neq 0$ *ssi* $\mathcal{F}$ *est une base de* E.