Chapitre 20 : Espaces préhilbertiens réels

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

Dans tout le chapitre, le Corps des scalaires est uniquement $\mathbb{R}$.

1 Produit scalaire

Définition. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E une application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x|y \rangle$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{Bilinéaire} : \forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x_1 + \lambda x_2 | y \rangle &= \langle x_1 | y \rangle + \lambda \langle x_2 | y \rangle, \\ \forall x, y_1, y_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x | y_1 + \lambda y_2 \rangle &= \langle x | y_1 \rangle + \lambda \langle x | y_2 \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Symétrique} : \forall x, y \in E, \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle.$$

$$\text{Définie positive} : \forall x \in E, \langle x | x \rangle \geq 0 \text{ avec égalité ssi } x = 0_E.$$

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel.

De plus, si E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

⊗ L'espace $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien muni du produit scalaire géométrique :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (1)$$

⊗ L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est euclidien muni du produit scalaire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^T B). \quad (2)$$

⊗ L'espace $C^0([a, b], \mathbb{R})$ est préhilbertien réel muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt. \quad (3)$$

⊗ L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ peut être muni de plusieurs produits scalaires naturels.

De manière géométrique, en considérant l'isomorphisme $\mathbb{R}_n[X] \cong_{iso} \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k. \quad (4)$$

De manière analytique, en considérant que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace des fonctions continues :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \langle P | Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt. \quad (5)$$

De manière arithmétique, en considérant $x_0 < \dots < x_n$ des racines réelles éventuelles :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k). \quad (6)$$

2 Norme et propriétés

Définition. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. La norme associée est définie

$$\text{pour } x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}. \quad (7)$$

⊗ La positivité du produit scalaire assure l'existence de la norme.

Théorème 2.1 (Cauchy-Schwarz). Pour tout $x, y \in E$, on a $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, avec égalité ssi les vecteurs sont colinéaires.

Proposition 2.2. Les normes vérifient les propriétés suivantes :

homogénéité Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

séparation $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Inégalité triangulaire $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposition 2.3. On dispose des identités remarquables suivantes pour $x, y \in E$:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2. \quad (8)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{identité du parallélogramme})$$

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (\text{polarisations})$$

3 Orthogonalité

3.1 Résultats généraux

Définition. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x | y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

On dit qu'un vecteur x est normal si $\|x\| = 1$.

On dit qu'une famille de vecteurs est orthogonale si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

On dit qu'une famille de vecteurs est orthonormale si les vecteurs sont tous normaux et deux à deux orthogonaux.

Pour deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E . On dit que F_1 et F_2 sont orthogonaux et on note $F_1 \perp F_2$ si :

$$\forall x_1 \in F_1, \forall x_2 \in F_2, x_1 \perp x_2. \quad (9)$$

On définit l'orthogonal d'un sous-espace F par :

$$F^\perp = \{y \in E \text{ tel que } \forall x \in F, \langle x | y \rangle = 0\} \quad (10)$$

Proposition 3.1. Toute famille orthogonale est une famille libre.

Si F_1 et F_2 sont orthogonaux alors ils sont en somme directe.

L'orthogonal $F^\perp$ d'un espace vectoriel est un espace vectoriel en somme directe avec F .

Théorème 3.2 (Pythagore). Soit $x, y \in E$. On a :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (11)$$

3.2 Base orthonormées

On se place désormais dans un espace Euclidien i.e. de dimension finie.

Proposition 3.3. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E . Soient $x, y \in E$.

Les coordonnées sont données par $x = \sum_{i=1}^n \langle x | u_i \rangle u_i$.

La norme est donnée par $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | u_i \rangle^2$.

Le produit scalaire est donnée par $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | u_i \rangle \langle y | u_i \rangle$.

Proposition 3.4 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Il existe un algorithme qui transforme une base quelconque $(e_1, \dots, e_n)$ de E en une base $(u_1, \dots, u_n)$ orthonormée.*

⊗ On détaille les étapes de l'algorithme :

On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

On définit $v_2 = e_2 - \langle e_2 | u_1 \rangle u_1$ puis $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$.

On définit $v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | u_i \rangle u_i$ puis $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$.

⊗ La matrice de passage entre ces deux bases est une matrice triangulaire.

Proposition 3.5. *Si E est de dimension finie alors on a les propriétés suivantes.*

Les espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

On a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

On a $(F^\perp)^\perp = F$.

Corollaire 3.6. *Pour un sous-espace F , on peut définir le projecteur orthogonal sur F et on note p_F la projection sur F le long de $F^\perp$. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormée de F alors :*

$$\text{Pour tout } x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | u_i \rangle u_i. \quad (12)$$

Théorème 3.7 (Inégalité de Bessel). *Soit E un espace préhilbertien réel de dimension quelconque. Soit F un sous-espace de dimension finie. On définit à nouveau le projecteur orthogonal p_F .*

Soit $x \in E$. On a $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Le vecteur $p_F(x)$ est l'unique $y \in F$ qui réalise la distance minimale de x à F :

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F). \quad (13)$$