# Chapitre 21 : Intégration

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

## 1 Définition de l'intégrale de Riemann sur un segment

On recherche à définir la valeur de $\int_a^b f$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

### 1.1 Construction de l'intégrale

**Définition.** *On dit que $(x_0, ..., x_n)$ est une subdivision d'un segment $[a,b]$ si ils forment une suite finie et strictement croissante de points de $[a,b]$ avec : $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.*
*On dit que $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier si il existe une subdivision $(x_0, .., x_n)$ tel que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les restrictions $g|_{]x_k, x_{k+1}[}$ sont constantes.*

⊗ Toute subdivision $(x_0, .., x_n)$ permet de créer une partition du segment $[a,b]$ en $n$ intervalles.
⊗ Pour un segment $[a,b]$, on dispose de la subdivision régulière $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ en $n$ intervalles de taille identique.

**Proposition 1.1.** *L'ensemble des fonctions en escaliers est stable par somme, produit et composition.*

**Définition** (Intégrale de Riemann)**.**
*On définit l'intégrale d'une fonction en escalier $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$\int_a^b g = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) c_k \text{ avec } g|_{]x_k, x_{k+1}[} = c_k \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

*On définit l'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ par :*

$$\int_a^b f^+ = \sup_{\substack{g \le f^+ \\ g \text{ en escalier}}} \int_a^b g. \tag{2}$$

*On définit l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \text{ avec } f^+ = \max(0, f) \text{ et } f^- = \max(0, -f). \tag{3}$$

*On définit l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ par :*

$$\int_a^b h = \int_a^b \mathrm{Re}(h) + i \int_a^b \mathrm{Im}(h). \tag{4}$$

⊗ Le théorème de la borne atteinte permet d'assurer l'existence de ces valeurs.
⊗ Géométriquement l'intégrale à valeurs positives représente l'aire sous la courbe.
⊗ Lorsque l'intégrale est à valeurs quelconques, on peut interpréter $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ comme étant la valeur moyenne de la fonction.

### 1.2 Propriétés fondamentales

**Proposition 1.2.** *L'intégrale est* <u>*linéaire*</u>*. Pour* $f_1, f_2 \in C^0([a,b],\mathbb{K})$ *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$*, on a :*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2. \tag{5}$$

**Proposition 1.3.** *On dispose de la* <u>*relation de Chasles*</u>*. Pour* $f$ *continue sur* $[a,b]$ *et* $c \in ]a,b[$*, on a :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{6}$$

⊗ On étend ainsi les définitions avec les conventions $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
⊗ Si $f$ est paire alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$. et si $f$ est impaire alors $\int_{-a}^a f = 0$.
Si $f$ est périodique de période $T > 0$ alors $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

**Proposition 1.4.** *On dispose de la* <u>*positivité stricte*</u> *de l'intégrale :*

$$\text{Pour } f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}_+ \text{ continue, on a : } \int_a^b f^+ \geq 0 \text{ avec égalité ssi } f^+ = 0. \tag{7}$$

*L'intégrale est* <u>*croissante*</u>*. Pour deux fonctions* $f_1$ *et* $f_2$ *continues à valeurs réelles, on a :*

$$\text{Si } f_1 \leq f_2 \text{ alors } \int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2. \tag{8}$$

**Proposition 1.5.** *Pour toute fonction* $f$ *continue sur* $[a,b]$*, on dispose de* <u>*l'inégalité triangulaire*</u> *:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \tag{9}$$

**Théorème 1.6** (Fondamentale de l'analyse différentielle)**.** *Pour* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *continue, la fonction* $t \mapsto \int_a^t f$ *est l'unique primitive de* $f$ *qui s'annule en* $a$*.*

⊗ Ceci permet d'obtenir les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

## 2 Lien avec le calcul de sommes

### 2.1 Sommes de Riemann

**Théorème 2.1.** *Soit* $f$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f. \tag{10}$$

⊗ Ceci permet de considérer la méthode des rectangles, des trapèzes et de Simpson de calcul intégral par ordinateur. On approxime l'intégrale par ces sommes avec un $n$ suffisamment grand.

### 2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 2.2.** *Soit* $f$ *une fonction de classe* $C^{n+1}$ *sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{11}$$

⊗ Cette formule est globale et non asymptotique (Taylor-Young) et ceci sans supposer $f$ polynomiale.
* C'est à dire que l'on ne suppose pas $b$ proche de $a$ pour obtenir la majoration.

# 3 Intégrale généralisée

## 3.1 Intégrale sur $[a, +\infty[$

On considère $f$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

**Définition.** *On dit que $\int_a^{+\infty} f$ <u>converge</u> si la limite $\int_a^x f$ existe et est finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Dans ce cas, on définit :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

*Sinon on dit que l'intégrale <u>diverge</u>.*

⊗ On dispose des intégrales convergentes de références en $+\infty$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \text{ pour } \alpha > 0. \tag{13}$$

Ainsi que les intégrales de Riemann en $+\infty$ :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1. \tag{14}$$

**Proposition 3.1.** *Si $f$ est à valeurs positives alors :*

$$\int_a^{+\infty} f \textit{ converge ssi } x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \textit{ est majorée.} \tag{15}$$

## 3.2 Intégrale sur un intervalle quelconque

Soit $f$ continue sur un intervalle $I$. On note $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

**Définition.** *On dit que l'intégrale, avec deux bornes hors de $I$, $\int_a^b f$ <u>converge</u> si pour un point $c \in I$ les intégrales, avec une seule borne hors de $I$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.*
*On dit alors que $\int_a^c f$ converge si la limite de $\int_x^c f$ existe et est finie lorsque $x$ tend vers $a$.*
*Dans le cas de convergence aux deux bornes, on définit la valeur de l'intégrale par :*

$$\int_a^b f = \int_I f = \left(\lim_{x\to a} \int_x^c f\right) + \left(\lim_{x\to b} \int_c^x f\right). \tag{16}$$

*Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale sur $I$ <u>diverge</u>.*

⊗ On dispose de l'exemple de référence des intégrales de Riemann en 0 :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1. \tag{17}$$

⊗ Sous l'unique réserve de converge de toutes les intégrales, les propriétés de linéarité, de relation de Chasles, de positivité, de croissance, de changement de variables et d'intégration par parties restent vraies. L'inégalité triangulaire dispose d'une extension plus forte.

**Proposition 3.2.** *Si l'intégrale converge absolument sur $I$ alors l'intégrale converge.*

$$\textit{i.e. si } \int_I |f| \textit{ converge alors } \int_I f \textit{ converge.} \tag{18}$$

**Théorème 3.3** (Comparaison). *Pour deux fonctions $f$ et $g$ continues sur $]a, c]$.*
*Si $f(t) =_{t\to a} O(g(t))$ et $\int_a^c |g|$ converge alors $\int_a^c f$ converge.*
*Pour deux fonctions $f$ et $h$ continues sur $[c, b[$.*
*Si $f(t) =_{t\to b} O(h(t))$ et $\int_c^b |h|$ converge alors $\int_c^b f$ converge.*

⊗ En particulier, on rappel que négligeable ou équivalent entraîne le caractère dominé.