Chapitre 22 : Séries numériques

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang fixé.

1 Convergence des séries

1.1 Définition et propriétés générales

Définition. *On appelle* <u>*série*</u> *toute collection de scalaires* $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est appelé* <u>*le terme général*</u> *de la série.*
On lui associe sa <u>*suite de sommes partielles*</u> $(S_n)_{n \geq n_0}$ *définie par :* $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *converge si la suite* $(S_n)_{n \geq n_0}$ *admet une limite finie.*
Dans ce cas, on note : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$ *la* <u>*somme de la série*</u>.
On considère également la <u>*suite des restes*</u> $(R_n)_{n \geq n_0}$ *définie par :* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \to_{+\infty} 0$.

$\otimes$ La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. La convergence est toujours une notion à comprendre 'à partir d'un certain rang'.

Proposition 1.1. *Si* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *et* $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *sont deux séries convergentes alors pour tout scalaires* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *la série* $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge. De plus,*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n. \tag{1}$$

$\otimes$ Cette propriété de linéarité nécessite au préalable la convergence des séries.

Proposition 1.2. *Si la série* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *est convergente alors la suite des termes* $u_n \to_{+\infty} 0$.

$\otimes$ La contraposée fournit les <u>séries grossièrement divergente</u> c'est à dire celle qui ont un terme général qui ne tend pas vers 0.
$\otimes$ La réciproque est fausse avec pour exemple <u>la série harmonique</u> : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge mais pas grossièrement.

1.2 Exemples de références

Proposition 1.3. *On appelle* <u>*série géométrique*</u> *les série du type :* $\sum_{n \geq 0} q^n$ *avec* $q \in \mathbb{C}$.
Si $|q| < 1$ *alors la série converge.*
Si $|q| \geq 1$ *alors la série diverge grossièrement.*
On dispose de plus de la formule : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ *dans le cas de convergence.*

Proposition 1.4. *On appelle* <u>*série de Riemann*</u> *les série du type :* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.
Si $\alpha > 1$ *alors la série converge.*
Si $\alpha \leq 1$ *alors la série diverge.*

$\otimes$ Le calcul des valeurs des sommes n'est pas connues en général. On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
$\otimes$ Lorsque $\alpha \in]0, 1]$ la série diverge mais pas grossièrement.

Proposition 1.5. *On appelle* <u>*série télescopique*</u> *les série du type :* $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n)$.
La série convergent ssi la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ *admet une limite finie.*
Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = (\lim_{+\infty} v_n) - v_0$.

2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, les séries sont considérées à termes réels et positifs.
$\otimes$ Les résultats de cette partie détermine la converge de la série mais ne fournit jamais une méthode de calcul de la somme de la série.

Lemme 2.1. *Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.*
La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Proposition 2.2 (Comparaison série-intégrale)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive, décroissante et qui tend vers 0 en $+\infty$. On a :*

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge ssi l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge.

$\otimes$ Ceci permet d'obtenir les cas de convergence des séries de Riemann par comparaison aux intégrales de Riemann.

Proposition 2.3 (Comparaison entre séries)**.** *Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries à termes positifs.*
Si $u_n =_{+\infty} O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

$\otimes$ On rappelle que si $u_n \leq v_n$ APCR, $u_n =_{+\infty} o(v_n)$ ou si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors en particulier $u_n =_{+\infty} O(v_n)$.
On peut alors appliquer le critère de comparaisons de la nature des séries.
$\otimes$ La contraposée permet de démontrer la nature divergente d'une série à termes positifs.

Proposition 2.4 (Règle d'Alembert)**.** *Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*
Si $\lambda < 1$ alors la série converge.
Si $\lambda > 1$ alors la série diverge.

$\otimes$ Dans le cas où $\lambda = 1$, la règle échoue et on ne peut rien dire. Toutes les séries de Riemann fournissent des exemples pour $\lambda = 1$.

3 Séries absolument convergentes

Définition. *On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une <u>série absolument convergente</u> si la série à termes positifs $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est une série convergente. On dit également de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est sommable.*

Théorème 3.1. *Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors la série converge. De plus :*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \tag{Inégalité triangulaire}$$

$\otimes$ Dans la pratique, on recherche donc à utiliser les résultats sur les séries à termes positifs en considérant la série des modules.

Théorème 3.2 (Critère spécial des séries alternées)**.** *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0 alors la séries alternées $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ est une série convergente.*

$\otimes$ Ceci fournit l'exemple de la <u>série harmonique alternée</u> $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ qui est convergente mais pas absolument convergente.