Chapitre 23 : Fonctions de deux variables

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

1 Topologie et continuité

1.1 Ouvert et Fermé de $\mathbb{R}^2$

On muni l'espace $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. On définit la boule ouverte centrée en a de rayon ε par :

$$B_\varepsilon(a) = \{u \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|u - a\| < \varepsilon\}. \quad (1)$$

On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si pour tout $a \in U$, il existe une boule ouverte centrée en a qui est contenue dans U i.e.

$$\forall a \in U, \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(a) \subset U. \quad (2)$$

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^2$ est un fermé si son complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est un ouvert.

⊗ La notion de boule ouverte généralise celle de voisinage d'un point.

Proposition 1.1. Les boules ouvertes sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

L'union d'un nombre quelconque d'ouverts est encore un ouvert.

⊗ On a le contre-exemple d'une intersection quelconque d'ouverts $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{1/n}((0,0)) = \{(0,0)\}$ qui est un fermé.

⊗ En passant au complémentaire, on en déduit que l'union finie et l'intersection quelconque de fermés sont des fermés.

1.2 Continuité d'un fonction à deux variables

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables.

Définition. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue si pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ l'image réciproque $f^{-1}(I) = \{a \in U \text{ tel que } f(a) \in I\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

⊗ On dispose également de la définition locale de continuité en $a \in U$ par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B_\eta(a)) \subset]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[. \quad (3)$$

On obtient la cohérence des définitions car f continue ssi f est continue en tout point de U .

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle). La continuité de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est équivalente à établir : pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de U telle que $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} a \in U$ alors $f(a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

2 Dérivées partielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables.

2.1 Développement limité et gradient

Définition. On dit que f admet des dérivées partielles au point $a = (x_0, y_0)$ si les limites suivantes existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (5)$$

⊗ L'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité de f en a . Par exemple $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(1/n, 1/\sqrt{\ln n}) \rightarrow -1 \neq f(0, 0)$.

Définition. On dit que f est de classe C^1 sur U si f admet des dérivées partielles et que ce sont des fonctions continues sur U .

On définit alors le gradient en $a \in U$ par $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$

Théorème 2.1. Si f est de classe C^1 au voisinage de (x_0, y_0) alors on a le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) =_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_y + o(\sqrt{h_x^2 + h_y^2}) \quad (6)$$

$$=_{h \rightarrow (0,0)} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), h \rangle + o(\|h\|) \quad (7)$$

avec $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0, 0)$.

⊗ Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point est ainsi donné par l'équation cartésienne :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (8)$$

2.2 Règle de la chaîne

Définition. Pour $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur. On définit, si elle existe, la dérivée suivant u de f en un point $a = (x_0, y_0)$ par :

$$\partial_u f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h} \quad (9)$$

⊗ En particulier, pour les vecteurs de la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ on retrouve la définition des dérivées partielles :

$$\partial_{e_1} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ et } \partial_{e_2} f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) \quad (10)$$

Proposition 2.2. Si f est de classe C^1 au voisinage d'un point a alors la dérivée de f suivant u existe et on a :

$$\partial_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a)u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)u_y \quad (11)$$

pour tout vecteur $u = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 2.3 (Règle de la chaîne). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 . Alors la composée $t \mapsto f((x(t), y(t)))$ est de classe C^1 et on a :

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y'(t) \quad (12)$$

⊗ La fonction $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ est un arc paramétré. On définit $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ le vecteur vitesse à l'instant t . La règle de la chaîne peut alors s'écrire :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \quad (13)$$

En particulier, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

⊗ Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré entre deux points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ alors la variation globale de la fonction est donnée par l'intégrale du gradient :

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_{M \in \gamma} \vec{\nabla} f(M) \cdot dO\vec{M} = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad (14)$$

Théorème 2.4. Pour f, φ et ψ des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la composée $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe C^1 et on a les formules :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a), \psi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a), \psi(a)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(a) \quad (15)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a), \psi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a), \psi(a)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(a) \quad (16)$$

2.3 Extremum et point critique

Définition. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un maximum global en $a \in U$ si $f(a) = \max f(U)$.

On dit que f atteint un maximum local en $a \in U$ si il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(a)$ tel que $f(a) = \max f(B_\varepsilon(a))$.

On dit que a est un point critique de f si f est de classe C^1 en a et $\nabla f(a) = (0, 0)$.

⊗ On définit de manière analogue les notions de minimum global et local.

Proposition 2.5. On suppose que f est de classe C^1 sur U .

Si f atteint un extremum en a alors a est un point critique de f .

⊗ La réciproque est fautive et on parle alors de point col ou point selle.