

TD 1 : Logique et éléments de calcul

1.1 Logique formelle

Exercice 1 (★) Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

- a) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
- b) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$.
- c) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \varepsilon$.
- d) $\forall x \in \mathbb{N}, [(\exists y \in \mathbb{N}, (x = 4y)) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}, (x = 2z)]$.
- e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, (x < z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, x < y < z)$.

Exercice 2 (★★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduire en français les assertions suivantes puis donner, lorsque cela est possible, une fonction satisfaisant la proposition et une fonction ne la satisfaisant pas :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$.
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(x + T)$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

1.2 Equations et Inéquations

Exercice 3 (★★) Raisonnement par analyse-synthèse.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.
- b) $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$.
- c) $\sqrt{x^2 + mx - 1} = 3m - x$ pour un paramètre réel $m \in \mathbb{R}$.
- d) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = m$ pour un paramètre réel $m \in \mathbb{R}$.
- e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$ pour des paramètres réels $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (★) Etude de signe.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a) $x^3 - 3x + 2 > 0$.
- b) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x+4} > 1$.
- c) $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$.
- d) $\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x + 9$.

1.3 Raisonnement par récurrence

Exercice 5 (★) Démontrer par récurrence que :

- a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
- b) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 6 (★) On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = n^{-n} \sum_{k=1}^n u_k^k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 7 (★) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = \cos \theta$, ainsi que la relation de récurrence pour $n \geq 0, u_{n+2} = 2u_1 u_{n+1} - u_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta)$.

1.4 Calcul de sommes

Exercice 8 (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1)$.
- d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{k/2} 6^{n-2k}$
- e) $\sum_{k=1}^n k 2^k$
- f) $\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

