Devoir Surveillé de Mathématiques n° 1
le samedi 16 Septembre 2023 - durée 3h

Exercice 1 : Déterminer si les assertions suivantes sont Vraies ou Fausses et le démontrer.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x^2$.

b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x^2$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 2n \leq 0 \Rightarrow n \leq 5$.

Exercice 2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{10x-1} - \sqrt{7x+1} = 1$.

b) $|x^2 - 3x + 2| + |x-1| + |x-2| = 1$.

c) $x - 4 < \sqrt{8x+1}$.

d) $\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x+2} < 1$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} 3^{n+k} 5^{2k}$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 6^{2n-k} 7^{n-2k}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

d) $\sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 4 : Résoudre les système suivants :

a) $\begin{cases} 2x + y - z &= 4 \\ x - y + z &= -1 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - 3y - z &= 3 \\ 3x - 4y - 3z &= 4 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x(y+z) &= 2 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 3x + y - z &= 1 \end{cases}$

Problème I : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $(F_n)_{n \geq 0}$ par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. On note $\varphi \in \mathbb{R}_+^*$ la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$ et ψ la racine négative. Montrer qu'elles vérifient $\varphi + \psi = 1, \varphi - \psi = \sqrt{5}$ et $\varphi\psi = -1$.
2. Montrer que $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^n - \psi^n)$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
4. Montrer que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ et $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$.

Problème II : Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère des entiers tels que $0 \leq i \leq j \leq n$.
   (a) Montrer que $\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-j}$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $n!n = (n+1)! - n!$ et $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k!k$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}(H_k + 1) = (n+1)H_n$.
   (b) Calculer $\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.