Devoir Surveillé de Mathématiques n° 1 - Corrigé

Exercice 1 : a) L'assertion est Vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$. On a bien $y > x^2$.

b) L'assertion est Fausse. Sa négation est $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = \sqrt{|y|} \in \mathbb{R}$. On a $x^2 = |y| \geq y$.

c) L'assertion est Fausse. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x \geq 0$ et $x < 1$.
On pose $x = 0$. Il vérifie $x^2 - x = 0 \geq 0$ et $x < 1$.

d) L'assertion est Vraie. On montre la contraposée $n > 5 \Rightarrow n^2 - 2n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n > 5$. On a $n^2 - 2n = n(n-2) > 0$.

Exercice 2 : a) On raisonne par Analyse-Synthèse.
<u>Analyse</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{10x-1} - \sqrt{7x+1} = 1$.
On a $10x - 1 = (1 + \sqrt{7x+1})^2 = 1 + 2\sqrt{7x+1} + 7x + 1$.
Puis $2\sqrt{7x+1} = 3x - 3$ donne $4(7x+1) = 9(x-1)^2 = 9(x^2 - 2x + 1)$.
Ainsi $9x^2 - 46x + 5 = 0$. Les racines sont 5 et 1/9.
<u>Synthèse</u> : Pour $x = 5$, on a $\sqrt{49} - \sqrt{36} = 1$.
Pour $x = 1/9$, on a $\sqrt{1/9} - \sqrt{16/9} = -1/3 \neq 1$.
<u>Conclusion</u> : 5 est l'unique solution.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ permettant d'en déduire son signe.
<u>1er cas : $x \leq 1$:</u>
L'équation s'écrit $x^2 - 3x + 2 - (x-1) - (x-2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 6\}$.
Donc 1 est la seule solution de ce cas.
<u>2eme cas : $1 \leq x \leq 2$:</u>
L'équation s'écrit $-(x^2 - 3x + 2) + (x-1) - (x-2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$.
Donc 1 et 2 sont les solutions de ce cas.
<u>3eme cas : $x \geq 2$:</u>
L'équation s'écrit $x^2 - 3x + 2 + (x-1) + (x-2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, -1\}$.
Donc 2 est la seule solution de ce cas.
<u>Conclusion :</u> Les solutions de l'équation sont 1 et 2.

c) Soit $x \in]-1/8, +\infty[$.
<u>1er cas : $x < 4$:</u>
Dans ce cas, $x - 4 < 0 \leq \sqrt{8x+1}$ et l'inéquation est toujours vraie.
<u>2eme cas : $x \geq 4$:</u>
Alors $0 \leq x - 4 < \sqrt{8x+1} \Leftrightarrow (x-4)^2 < 8x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 15 < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 15[$.
<u>Conclusion :</u> L'ensemble des solutions est $]-1/8, 15[$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{2}{x+2} = ... = \dfrac{2x^2 - 2}{(2x+1)(x+2)}$.
On étudie le signe de f. Le numérateur change de signe en 1 et -1. Le dénominateur en $-1/2$ et -2. On en déduit (avec un tableau de signes) :
$f(x) > 0$ ssi $x \in]-\infty, -2[\cup]-1, -1/2[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 3 : a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}3^{n+k}5^{2k}$

$\displaystyle= 3^n \sum_{k=0}^{n} (3.5^2)^k 2^{n-k}$

$\displaystyle= 3^n \frac{75^{n+1} - 2^{n+1}}{75-2}$

$\displaystyle= \frac{3^n}{73}(75^{n+1} - 2^{n+1})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 6^{2n-k} 7^{n-2k}$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (6 \times 7^2)^{n-k} 6^n 7^{-n}$

$= (3 + 294)^n 6^n 7^{-n}$

$\displaystyle= \left(\frac{1782}{7}\right)^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k)$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$

$\displaystyle= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle= \frac{n(n+1)[n(n+1) - 2(2n+1) + 4]}{4}$

$\displaystyle= \frac{n(n+1)(n^2 - 3n + 2)}{4}$

$\displaystyle= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j}$

$\displaystyle= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i$

$\displaystyle= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}n$

$\displaystyle= \frac{n(n+3)}{4}$.

Exercice 4 : a) $\begin{cases} x - y + z & = -1 \\ 2x + y - z & = 4 \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ x - 2y - z & = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = -1 \\ 3y - 3z & = 6 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y - 2z & = 1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = -1 \\ y - z & = 2 \quad L_2 \leftarrow L_2/3 \\ -3z & = 3 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 1, -1)$

L'unique solution du système est $(1, 1, -1)$.

b) $\begin{cases} x - 2y + z & = 1 \\ 2x - 3y - z & = 3 \\ 3x - 4y - 3z & = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z & = 1 \\ y - 3z & = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - 6z & = 1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z & = 1 \\ y - 3z & = 1 \\ 0 & = -1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$.

Le système n'admet pas de solution.

c) On note $u = 2x$ et $v = y + z$. On résout le sous-système somme-produit $\begin{cases} uv & = 4 \\ u + v & = 4 \end{cases}$.

Ainsi $\{u, v\}$ sont les racines de $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ i.e $u = v = 2$.

Donc $\begin{cases} x(y+z) & = 2 \\ 2x + y + z & = 4 \\ 3x + y - z & = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = 2 \\ y+z & = 2 \\ 3x+y-z & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y+z & = 2 \\ y-z & = -2 \end{cases}.$$

La solution du système somme-différence en (y,z) est $(0,2)$.
Le système de l'énoncé admet une unique solution $(1,0,2)$.

Problème I :

1. Les racines de X^2-X-1 sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
   On sait que le produit est $\varphi\psi = -1$ et que la somme est $\varphi+\psi = 1$ avec le coefficient du polynôme.
   Donc $\psi = \dfrac{-1}{\varphi} = 1-\varphi$.
2. On démontre le résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
   Pour $n=0$, $F_0 = 0 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(1-1)$.
   Pour $n=1$, $F_1 = 1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\varphi-\psi)$ car $\varphi-\psi=\sqrt{5}$.
   Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $F_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n-\psi^n\right)$ et $F_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)$.
   On a $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
   $= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n-\psi^n+\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)$ par HR
   $= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n(1+\varphi)-\psi^n(1+\psi)\right)$
   $= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n\varphi^2-\psi^n\psi^2\right)$ car φ et ψ vérifient $x^2=1+x$
   $= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}\right)$.
3. On démontre le résultat par récurrence simple sur $n\in\mathbb{N}$.
   Pour $n=0$, on a $F_0 = 0 = 1-1 = F_2-1$.
   Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2}-1$.
   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} F_k = \sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1}$
   $= F_{n+2}-1+F_{n+1}$ par HR
   $= F_{n+3}-1$ par définition de la suite.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   On a $F_n^2 = \dfrac{1}{5}(\varphi^n-\psi^n)^2$ d'après la question 2.
   $= \dfrac{1}{5}(\varphi^{2n}-2(\varphi\psi)^n+\psi^{2n})$
   $= \dfrac{1}{5}(\varphi^{2n}+\psi^{2n}) - \dfrac{2}{5}(-1)^n$ car $\varphi\psi=-1$.

Donc $F_{n+1}^2+F_n^2=\dfrac{1}{5}(\varphi^{2n+2}+\psi^{2n+2}+\varphi^{2n}+\psi^{2n})-\dfrac{2}{5}[(-1)^{n+1}+(-1)^n]$
$=\dfrac{1}{5}[\varphi^{2n+1}\left(\varphi+\dfrac{1}{\varphi}\right)+\psi^{2n+1}\left(\psi+\dfrac{1}{\psi}\right)]+0$
$=\dfrac{1}{5}[\varphi^{2n+1}\sqrt{5}-\psi^{2n+1}\sqrt{5}]=F_{2n+1}$.
car $\varphi+\dfrac{1}{\varphi}=varphi-\psi=\sqrt{5}$ et $\psi+\dfrac{1}{\psi}=\psi-\varphi=-\sqrt{5}$.
De même $F_{n+2}^2-F_n^2=\dfrac{1}{5}(\varphi^{2n+4}+\psi^{2n+4}-\varphi^{2n}-\psi^{2n})-\dfrac{2}{5}[(-1)^{n+2}-(-1)^n]$
$=\dfrac{1}{5}[\varphi^{2n+2}(\varphi^2-\dfrac{1}{\varphi^2})+\psi^{2n+2}(\psi^2-\dfrac{1}{\psi^2})]$
$=\dfrac{1}{5}[\varphi^{2n+2}\sqrt{5}-\psi^{2n+2}\sqrt{5}]=F_{2n+2}$.
car $\varphi^2-\dfrac{1}{\varphi^2}=\varphi^2-\psi^2=(\varphi-\psi)(\varphi+\psi)=\sqrt{5}$.

Problème II : 1. (a) On a $\dbinom{n}{j}\dbinom{j}{i}=\dfrac{n!}{j!(n-j)!}\dfrac{j!}{i!(j-i)!}=\dfrac{n!}{(n-j)!i!(j-i)!}$.
Et $\dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{n-j}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}\dfrac{(n-i)!}{(n-j)!((n-i)-(n-j))!}=\dfrac{n!}{i!(n-j)!(j-i)!}$.
Donc $\dbinom{n}{j}\dbinom{j}{i}=\dbinom{n}{i}\dbinom{n-i}{n-j}$.

(b) Donc $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-j}$
$\displaystyle=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}$ avec $k=n-j$
$\displaystyle=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}$
$=(1+2)^n=3^n$ d'après la formule du binôme de Newton.

2. (a) On a $n+1)!-n!=n![n+1-1]=n!n$.
Et $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\dfrac{n}{(n+1)!}$.

(b) On peut effectuer des télescopages des sommes :
En effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!k=\sum_{k=0}^{n}(k+1)!-k!=(n+1)!-1$.
Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

3. (a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}H_k$
$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$

$= \displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n} \frac{1}{i}$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i}$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{i}$

$= (n+1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1$

$= (n+1)H_n - n.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(H_k+1) = (n+1)H_n.$

(b) De même $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$

$= \displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n} k\frac{1}{i}$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n} k$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2}\right)$ car $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{i-1} k$

$= \displaystyle\frac{n(n+1)}{2}H_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2}$

$= \displaystyle\frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$

$= \displaystyle\frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$