

DM1 : Les nombres complexes
à rendre le jeudi 28 septembre 2023.

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{C} :

- a) $2z^2 + (i - 3)z + (3i - 1) = 0$.
- b) $z^2 + 3z + 3 = i$.
- c) $z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1 = -4 - 4i$.
- d) $(1 + iz)^4(1 - i) = (1 - iz)^4(1 + i)$.

Exercice 2 : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- a) Montrer que $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
- b) Démontrer que $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.
- c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$
- d) Montrer que $|z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + u \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - u \right|$ avec $u^2 = z_1 z_2$.