DM1 - Corrigé

Exercice 1 : a) On a $\Delta = (i-3)^2 - 4.2.(3i-1) = 8-6i+8-24i = 16-30i$.

On recherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Ils vérifient $\begin{cases} a^2-b^2 & = 16 \\ 2ab & = -30 \\ a^2+b^2 & = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 25 \\ b^2 & = 9 \\ ab & = -15 \end{cases}$. Donc $\delta = 5-3i$ ou $\delta = -5+3i$.

Les solutions sont donc $\dfrac{(3-i)+(5-3i)}{4} = 2-i$

et $\dfrac{(3-i)-(5-3i)}{4} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

b) Le discriminant de $z^2+3z+3-i$ est $\Delta = 9-4(3-i) = -3+4i$.

On recherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Ils vérifient $\begin{cases} a^2-b^2 & = -3 \\ 2ab & = 4 \\ a^2+b^2 & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 1 \\ b^2 & = 4 \\ ab & = 2 \end{cases}$. Donc $\delta = 1+2i$ ou $\delta = -1-2i$.

Les solutions sont donc $\dfrac{-3+1+2i}{2} = -1+i$

et $\dfrac{-3-1-2i}{2} = -2-i$.

c) On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1 = -4-4i$

$\Leftrightarrow (z-1)^5 = \sqrt{2}^5 e^{-3i\pi/4}$

$\Leftrightarrow z-1 = \sqrt{2}\omega e^{-3i\pi/20}$ pour $\omega \in \mathbb{U}_5$

$\Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}e^{2i\pi(k/5-3/40)}$ pour $k \in [\![0,4]\!]$.

Donc l'ensemble des solutions est :

$\left\{1+\sqrt{2}e^{-3i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{5i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{13i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{21i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{29i\pi/20}\right\}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$. On a :

$(1+iz)^4(1-i) = (1-iz)^4(1+i)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \dfrac{1+i}{1-i} = e^{i\pi/2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\pi/8}\omega$ pour $\omega \in \mathbb{U}_4$

$\Leftrightarrow 1+iz = e^{i\pi/8+ik\pi/2}\omega(1-iz)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

$\Leftrightarrow z = i\dfrac{1-e^{i\pi/8+ik\pi/2}}{1+e^{i\pi/8+ik\pi/2}}$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

$\Leftrightarrow z = i\left(\dfrac{-2i\sin(\theta/2)\,e^{i\theta/2}}{2\cos(\theta/2)\,e^{i\theta/2}}\right)$ à l'aide de l'arc moitié avec $\theta = \pi/8 + k\pi/2$.

$\Leftrightarrow z = \tan(\pi/16 + k\pi/4)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

Donc les solutions sont $\{\tan(\pi/16), \tan(5\pi/16), \tan(9\pi/16), \tan(13\pi/16)\}$.

Exercice 2 : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) On a : $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) + |z_2|^2$.
Et de même $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} = |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) + |z_2|^2$.
Donc $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

b) On a $2|z_1| = |(z_1+z_2)+(z_1-z_2)| \leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2|$ par I.T.
Et $2|z_2| = |(z_1+z_2)+(z_2-z_1)| \leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2|$ par I.T.
Donc $2|z_1| + 2|z_2| \leq 2|z_1+z_2| + 2|z_1-z_2|$ en additionnant les inéquations.
Puis $|z_1| + |z_2| \leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2|$.

c) Le cas d'égalité est réalisé lorsque les deux inégalités triangulaires du **b)** sont des égalités. Ainsi :
$|z_1| + |z_2| = |z_1+z_2| + |z_1-z_2|$
ssi (z_1+z_2 et z_1-z_2 colinéaires de même sens)
et (z_1+z_2 et z_2-z_1 colinéaires de même sens)
ssi z_1+z_2 et z_1-z_2 sont colinéaires de même sens et de sens contraire
ssi l'un des vecteurs z_1+z_2 ou z_1-z_2 est nul
ssi $z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$.

d) On a $\left(|\frac{(z_1+z_2)}{2}+u| + |\frac{(z_1+z_2)}{2}-u|\right)^2$

$$= \left|\frac{(z_1+z_2)}{2}+u\right|^2 + 2\left|\frac{(z_1+z_2)^2}{4}-u^2\right| + \left|\frac{(z_1+z_2)}{2}-u\right|^2$$

$$= 2\left(\left|\frac{(z_1+z_2)}{2}\right|^2 + |u|^2\right) + 2\left|\frac{(z_1+z_2)^2}{4} - z_1z_2\right| \text{ d'après } \mathbf{a)} \text{ et } z_1z_2 = u^2$$

$$= \frac{2}{4}|z_1+z_2|^2 + 2|u^2| + \frac{2}{4}\left|z_1^2+2z_1z_2+z_2^2-4z_1z_2\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(|z_1+z_2|^2 + 4|z_1z_2| + |z_1-z_2|^2\right)$$

$$= \left(|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\right) \text{ d'après } \mathbf{a)}$$

$$= (|z_1|+|z_2|)^2.$$

Ainsi $|z_1| + |z_2| = |\frac{(z_1+z_2)}{2}+u| + |\frac{(z_1+z_2)}{2}-u|$.