

TD3 : Fonctions d'une variable réelle

3.1 Fonctions de référence

Exercice 1 (★) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- a) $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln(2) = \ln(6x+1) + 2\ln(x-2)$.
- b) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.
- c) $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.
- d) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$.
- e)
$$\begin{cases} x+y & = 520 \\ \log_{10} x + \log_{10} y & = 4 \end{cases}$$
- f)
$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z & = 15 \\ e^x e^y e^z & = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) = z \ln(3) \end{cases}$$

Exercice 2 (★★) Étudier les fonctions suivantes :

- a) $x \mapsto \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right)$.
- b) $x \mapsto \frac{x^2-x}{x-3}$.
- c) $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$.
- d) $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.
- e) $x \mapsto x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.
- f) $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$.

Exercice 3 (★) Démontrer les formules suivantes sur les fonctions hyperboliques :

- a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- b) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
- c) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$.
- d) $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.
- e) $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$.
- f) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Exercice 4 (★★) Résoudre les équations suivantes :

- a) $\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arctan} 2x - \frac{\pi}{2}$
- b) $\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}$
- c) $\operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13} = \operatorname{Arcsin} x$
- d) $\sin(2\operatorname{Arccos}(\cotan(2\operatorname{Arctan} x))) = 0$

3.2 Calcul de dérivées

Exercice 5 (★★) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le ou les intervalles de validité du calcul) :

- a) $A(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$
- b) $B(x) = \ln(\operatorname{sh} x)$
- c) $C(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{1+x^2}$
- d) $D(x) = \sin(\sqrt{\ln x})$
- e) $E(x) = e^x \ln(\sin x)$
- f) $F(x) = \operatorname{Arccos}(\ln x)$
- g) $G(x) = x^{\operatorname{Arcsin} x}$
- h) $H(x) = \ln \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}$
- i) $I(x) = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$

Exercice 6 (★) Montrer l'identité pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} 2x)$.

Exercice 7 (★) Soit n un entier naturel. Calculer la dérivée n -ième de $f_n : x \mapsto x^n(1+x)^n$ de deux manières. En déduire la formule $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 8 (★★) Calculer les dérivées d'ordre n , pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$