

TD4 : Calcul de primitives et Équations différentielle

4.1 Calcul de primitives

Exercice 1 (★) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$	c) $c(x) = \sin^2(x)$	e) $e(x) = \frac{1}{(2x+5)^3}$
b) $b(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$	d) $d(x) = \cos^2(x)$	f) $f(x) = \tan^2(x)$

Exercice 2 (★) Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégration par parties :

a) $\int_0^1 t^2 e^t dt$	c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(1 + \cos t) dt$	d) $\int_0^{\pi} t e^t \sin(2t) dt$

Exercice 3 (★) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions :

a) $a(x) = (x+1)e^{-x}$	d) $d(x) = x \operatorname{Arctan} x$	g) $g(x) = e^x \cos^2 x$
b) $b(x) = (x^2 + x + 1)e^{2x}$	e) $e(x) = \ln^2 x$	
c) $c(x) = e^x \sin x$	f) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$	h) $h(x) = \sin(\ln x)$

Exercice 4 (★★) A l'aide du changement de variables proposé, calculer les primitives des fonctions :

a) $a(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ avec $u = \sqrt{1+x}$	e) $e(x) = \frac{2+\ln x}{x(1+\ln x)^3}$ avec $u = 1 + \ln x$
b) $b(x) = x^{-1/2} 2^{\sqrt{x}}$ avec $u = \sqrt{x}$	f) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ avec $u = \sqrt{e^x+1}$
c) $c(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ avec $u = \cos x$	g) $g(x) = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3+\operatorname{ch} x}$ avec $u = \operatorname{ch} x$
d) $d(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ avec $u = \sin x$	

Exercice 5 (★★) Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{t \sin(t) dt}{3+\sin^2 t}$. En utilisant le changement de variable $u = \pi - t$, déterminer la valeur de I .

Exercice 6 (★) Décomposer les fractions rationnelles et calculer une primitive :

a) $a(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$	c) $c(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$	e) $e(x) = \frac{x^2}{x^2-x+2}$
b) $b(x) = \frac{3x+7}{x^2-3x+2}$	d) $d(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$	f) $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-1)(x+1)}$

4.2 Equations différentielles

Exercice 7 (★★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $(1+x)y' - (2+x)y = 2x$	d) $xy' - 2y = \frac{2x^2(1+2x^2)}{x^2+1}$
b) $xy' - y = (x^2 + x + 1)^3$	e) $2y' + 2y \cos x = \sin x$
c) $y' - 3y = x^2$	f) $y + y' = 2xe^{-x} + x^2$

Exercice 8 (★★) Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

a) $y'' - 4y' + 3y = e^x$	h) $y'' - 2y' + y = e^x(x^2 + x + 1)$
b) $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x$	i) $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x \cos 2x + \sin 2x)$
c) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$	j) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin 2x$
d) $y'' + 2y' + 2y = x^2 \operatorname{sh} x \cos x$	k) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^{2x}$
e) $y'' + y' + y = x \cos x$	l) $y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{ch}^2 x + x^2 \cos x + x e^{3x} \sin x$
f) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$	m) $y'' - 3y' + 2y = -e^x(x+1)/x^2$
g) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x + e^x \sin 2x$	n) $y'' + y = 1/\cos x$