DS n$^{\text{o}}$ 2 - Corrigé

Exercice 1 : a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(x+\pi/3) - \sin(2x-\pi/2) = 0$
$\Leftrightarrow \cos(x+\pi/3) = \sin(2x-\pi/2) = \cos(\pi-2x)$ car $\sin(\theta) = \cos(\pi/2-\theta)$
$\Leftrightarrow x+\pi/3 = \pi-2x[2\pi]$ ou $x+\pi/3 = 2x-\pi[2\pi]$
$\Leftrightarrow 3x = 2\pi/3[2\pi]$ ou $x = 4\pi/3[2\pi]$
$\Leftrightarrow x = 2\pi/9[2\pi/3]$ ou $x = 4\pi/3[2\pi]$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{2\pi/9; 8\pi/9; 14\pi/9; 4\pi/3\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

b) On a $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ donc $\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos(2x+\pi/4)$.
Ainsi $\cos(2x) - \sin(2x) = 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(2x+\pi/4) = 1$
$\Leftrightarrow \cos(2x+\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\Leftrightarrow 2x+\pi/4 = \pi/4[2\pi]$ ou $2x+\pi/4 = -\pi/4[2\pi]$
$\Leftrightarrow x = 0[\pi]$ ou $x = -\pi/4[\pi]$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{0; \pi; 3\pi/4; 7\pi/4\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

c) On reconnaît un polynôme du 2nd degré en $\tan x$.
Le discriminant de $X^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}X - 1$ est $\Delta = 12/9 + 4 = 16/3 = (4\sqrt{3}/3)^2$.
Donc les racines sont $\frac{2\sqrt{3}/3+4\sqrt{3}/3}{2} = \sqrt{3}$ et $\frac{2\sqrt{3}/3-4\sqrt{3}/3}{2} = -\sqrt{3}/3$.
Puis on résout $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pi/3[\pi]$ et $\tan x = -\sqrt{3}/3 \Leftrightarrow x = -\pi/6[\pi]$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{\pi/3; 4\pi/3; 5\pi/6; 11\pi/6\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : a) Le discriminant du polynôme du 2nd degré est
$\Delta = (1+2i)^2 - 4\times 3(1+i) = -15-8i$. On recherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
Il vérifie le système $\begin{cases} a^2-b^2 &= -15 \\ 2ab &= -8 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{225+64} = 17 \end{cases}$ On obtient $\delta = 1-4i$.
Puis les solutions sont $\frac{(1+2i)+(1-4i)}{2} = 1-i$ et $\frac{(1+2i)-(1-4i)}{2} = 3i$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{1-i; 3i\}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On reconnaît la formule du binôme de Newton :$(z+1)^4 = z^4+4z^3+6z^2+4z+1$.
Ainsi $z^4+4z^3+6z^2+4z+17 = 0$
$\Leftrightarrow (z+1)^4 + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (z+1)^4 = -16 = 16e^{i\pi}$
$\Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{U}_4, z+1 = \omega 2e^{i\pi/4}$
$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,3]\!], z = 2e^{i\pi/4+2ik\pi/4} - 1$.
Donc l'ensemble des solutions est $\{2e^{i\pi/4}-1; 2e^{3i\pi/4}-1; 2e^{5i\pi/4}-1; 2e^{7i\pi/4}-1\}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1; -1\}$.
On a $(z^2+1)^4 = (z^2-1)^4$
$\Leftrightarrow \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^4 = 1$ car $z^2 \neq 1$.
$\Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{U}_4, \frac{z^2+1}{z^2-1} = \omega$
$\Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{U}_4, z^2+1 = \omega(z^2-1)$
$\Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{U}_4 - \{1\}, z^2 = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ car $\omega \neq 1$ ($z^2+1 = z^2-1$ est absurde).
$\Leftrightarrow z^2 = \frac{-1+1}{-1-1} = 0(\omega = -1)$ ou $z^2 = \frac{i+1}{i-1} = e^{-i\pi/2}(\omega = i)$ ou $z^2 = \frac{-i+1}{-i-1} = e^{i\pi/2}(\omega = -i)$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z \in \{e^{-i\pi/4}; e^{3i\pi/4}\}$ ou $z \in \{e^{i\pi/4}; e^{-3i\pi/4}\}$
Donc l'ensemble des solutions est $\{0; e^{i\pi/4}; e^{-i\pi/4}; e^{3i\pi/4}; e^{-3i\pi/4}\}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $w = \exp(z)$.
On résout l'équation du 2nd degré $2w^2 + (3 - i\sqrt{3})w + (1 - i\sqrt{3}) = 0$.
Le discriminant $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2 - 4 \times 2(1 - i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{2i\pi/3}$.
Donc $\delta = 2e^{\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$ convient.
Puis $w = \frac{-(3-i\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3})}{2\times 2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $w = \frac{-(3-i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})}{2\times 2} = -1$.
Donc $e^z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z \in \{2i\pi/3\} + 2i\pi\mathbb{Z}$
ou $e^z = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z \in \{i\pi\} + 2i\pi\mathbb{Z}$
Donc l'ensemble des solutions est $\{2i\pi/3; i\pi\} + 2i\pi\mathbb{Z}$.

Problème I :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $r_1(z) = e^{i\pi/2}(z - (1+i)) + (1+i) = i(z - 1 - i) + 1 + i = iz + 2$.
Et $h_2(z) = 2(z - (-1+2i)) + (-1+2i) = 2z + 1 - 2i$.
2. La réciproque de R_1 est la rotation d'angle $-\pi/2$ de même centre i.e. R_2. Ainsi $r_2(z) = -i(z - (1+i)) + (1+i) = -iz + 2i$ vérifie bien $r_1(r_2(z)) = z$.
La réciproque de H_1 est l'homothétie de rapport $1/2$ de même centre i.e. H_2. Donc $h_2(z) = \frac{1}{2}(z - (-1+2i)) + (-1+2i) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} + i$ vérifie bien $h_1(h_2(z)) = z$.
3. Par le calcul, on trouve $f(z) = r_1(h_1(r_2(z))) = 2z + i$ et $g(z) = h_1(r_1(h_2(z))) = iz + 3 - 3i$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On recherche les points fixes.
On a : $f(z) = z \Leftrightarrow 2z + i = z \Leftrightarrow z = -i$.
Et : $g(z) = z \Leftrightarrow iz + 3 - 3i = z \Leftrightarrow z = \frac{3-3i}{1-i} = 3$.
Donc f est associée à l'homothétie de rapport 2 et de centre $C(0, -1)$.
Et g est associée à la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $D(3, 0)$.

Problème II :

1. (a) On raisonne par l'absurde en supposant $u = 0$. On en déduit que $U = u^3 = 0$ est solution de (R). Puis que $0^2 + q \times 0 - \frac{p^3}{27} = 0$ i.e. $p^3 = 0$ donc $p = 0$. Absurde car l'énoncé suppose p non nul.
(b) On a $u^3v^3 = u^3\left(\frac{-p}{3u}\right)^3 = \frac{-p^3}{27}$.
Or on sait que U et V sont les racines de $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$. Donc on a également $UV = \frac{-p^3}{27}$. On en déduit que $u^3v^3 = UV$ avec $u^3 = U \neq 0$. Donc $v^3 = V$.
(c) On a $u^3 + v^3 = U + V = -q$ la somme des racines de $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$.
2. (a) On test le candidat $z_1 = u + v$ dans l'équation (E). On a $(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) + p(u+v) + q$
$= -q - p(u+v) + p(u+v) + q = 0$ car $u^3 + v^3 = -q$ et $3uv = -p$.
(b) Deux méthodes : on peut tester directement z_2 et z_3 et on utilise la relation $j^3 = 1$.
On peut adapter le résultat précédent : On note $u' = ju$. Il vérifie $(u')^3 = U$ donc ce qui précède s'applique avec $v' = \frac{-p}{3u'} = \frac{-p}{3ju} = j^2v$. Ainsi d'après 2.a. $ju + j^2v = u' + v'$ est racine de (E).
De même avec $u'' = j^2u$ on trouve $v'' = jv$ et donc $j^2u + jv$ est solution de (E).
3. (a) L'équation (R) est $Z^2 + Z - \frac{(-3)^3}{27} = Z^2 + Z + 1 = 0$. Donc les racines sont $U = j = \exp(2i\pi/3)$ et $V = j^2$.

Puis $u = \exp(2i\pi/9)$ est une racine cubique de U i.e. vérifie $u^3 = U$.
Enfin $v = \frac{-p}{3u} = \exp(-2i\pi/9)$.

(b) Les trois solutions complexes sont $z_1 = u + v = \exp(2i\pi/9) + \exp(-2i\pi/9) = 2\cos(2\pi/9)$,
$z_2 = ju + j^2 v = \exp(2i(\pi/3 + \pi/9)) + \exp(2i(-\pi/3 - \pi/9)) = 2\cos(8\pi/9)$
et $z_3 = j^2 u + jv = \exp(2i(-\pi/3 + \pi/9)) + \exp(2i(\pi/3 - \pi/9)) = 2\cos(4\pi/9)$.
En particulier, les trois solutions sont réelles.

4. On traite dans cette question le cas $p = q = -1$.

(a) L'équation (R) est $Z^2 - Z - \frac{(-1)^3}{27} = Z^2 - Z + \frac{1}{27} = 0$. Le discriminant de l'équation est $\Delta = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$.
Donc les racines sont $U = \frac{1+\sqrt{23/27}}{2}$ et $V = \frac{1-\sqrt{23/27}}{2}$.
Puis $u = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{23/27}}{2}}$ est une racine cubique de U.
Enfin $v = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{23/27}}{2}}$ car on vérifie que $uv = \frac{1}{3} = -p/3$.

(b) La solution réelle est $z_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{23/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{23/27}}{2}} \in \mathbb{R}$.
Deux méthodes pour démontrer que c'est la seule. On peut calculer z_2 et z_3 et montrer qu'ils ne sont pas réelles i.e. $\mathrm{Im}(z_2) = -\mathrm{Im}(z_3) \neq 0$.
On peut également étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x - 1$. Elle est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 1$. Elle change de variation en $\pm\sqrt{1/3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Or $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$,
$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < \frac{4}{9} - 1 < 0$,
$\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $\mathbb{R}$ une unique fois (entre $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $+\infty$).