Devoir Surveillé de Mathématiques n° 2
le samedi 7 octobre 2023 - durée 3h

Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x+\pi/3) - \sin(2x-\pi/2) = 0$

b) $\cos(2x) - \sin(2x) = 1$

c) $\tan^2(x) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan(x) - 1 = 0$

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0$

b) $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 17 = 0$

c) $(z^2+1)^4 = (z^2-1)^4$

d) $2\exp(2z) + (3-i\sqrt{3})\exp(z) + (1-i\sqrt{3}) = 0$

Problème I : On note R_1 (resp. R_2) la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\pi/2$ (resp. $-\pi/2$). De même, on note H_1 (resp. H_2) l'homothétie de centre $B(-1,2)$ et de rapport 2 (resp. 1/2).

1. Déterminer les applications $r_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associée à R_1 et H_1.
2. Déterminer r_2 et h_2 associée à R_2 et H_2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = id_{\mathbb{C}} = h_1 \circ h_2$.
3. On définit les composées $f = r_1 \circ h_1 \circ r_2$ et $g = h_1 \circ r_1 \circ h_2$.
   Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = 2z + i$ et $g(z) = iz + 3 - 3i$.
4. Caractériser géométriquement les transformations associée à f et g.

Problème II : Soit $p, q \in \mathbb{C}^*$ des paramètres complexes non nuls.

On recherche à résoudre l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 + pz + q = 0.$$

On considère également l'équation (R) d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On note U et V les racines complexes de (R). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1. (a) Montrer que $u \neq 0$. On pose alors $v = \frac{-p}{3u}$.
   (b) Calculer u^3v^3. En déduire que $v^3 = V$.
   (c) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.
2. (a) Montrer que $z_1 = u + v$ est solution de (E).
   (b) Montrer que $z_2 = ju + j^2v$ et $z_3 = j^2u + jv$ sont également solutions de (E).
3. On traite dans cette question le cas $p = -3$ et $q = 1$.
   (a) Calculer U et V puis u et v.
   (b) En déduire les trois solutions réelles de l'équation $z^3 - 3z + 1 = 0$ et les calculer à l'aide de $\cos(k\pi/9)$ pour des valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.
4. On traite dans cette question le cas $p = q = -1$.
   (a) Calculer U et V puis u et v.
   (b) En déduire l'équation $z^3 - z - 1 = 0$ admet une unique solution réelle et la calculer à l'aide de radicaux.