

TD5 : Nombres réels et suites

5.1 Inégalités et borne supérieure

Exercice 1 (★) Montrer que tout réels x et y strictement positif :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{(x^2+y^2)/2}.$$

Pour quels valeurs obtient-on l'égalité pour chacune des inégalités.

Exercice 2 (★) Démontrer les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$.
- c) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 3 (★★) Déterminer les bornes inférieure et supérieure, lorsqu'elles existent, des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1} \text{ pour } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 4 (★★) Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.

- a) Prouver l'existence de $\sup(A)$ et $\inf(B)$ et montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
- b) Montrer que $\sup(A) = \inf(B) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, |x-y| < \varepsilon$.

Exercice 5 (★★) Déterminer les ensembles : $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}]$ et $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$.

5.2 Suites réelles explicites et récurrences linéaires

Exercice 6 (★) Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des suites suivantes :

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------------|---|
| a) $\frac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$ | d) $n^4 + \cos n$ | g) $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ où $a, b > 0$, |
| b) $\frac{1}{n} + (-1)^n$ | e) $\frac{n^2(1+(-1)^n)}{n^3+1}$ | h) $\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{1+2+\dots+n}$ |
| c) $\sqrt{n} + (-1)^n$ | f) $\frac{n+(-1)^n n^2}{n^2+n+1}$ | i) $n^2 \times \frac{1+2+\dots+n}{1+8+\dots+n^3}$ |

Exercice 7 (★) Déterminer une expression explicite et la limite éventuelle des suites définies par :

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{cases} a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0 \\ a_0 = 1 \text{ et } a_1 = -2 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} c_{n+2} - c_{n+1} + \frac{c_n}{2} = 0 \\ c_0 = 1 \text{ et } c_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} 2b_{n+2} + b_{n+1} - b_n = 0 \\ b_0 = 3 \text{ et } b_1 = 0 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} d_{n+2} - 6d_{n+1} + 9d_n = 0 \\ d_0 = 0 \text{ et } d_1 = 3 \end{cases}$ |

Exercice 8 (★) Etudier la suite définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence : $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 9 (★) Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

Calculer u_n^2 . En déduire la limite de la suite (u_n) .

5.3 Suites récurrentes non linéaires

Exercice 10 (★) Etudier la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Exercice 11 (★) Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}$.

Exercice 12 (★★) Montrer que la suite définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$ n'admet pas de limite.

Exercice 13 (★) Soient $0 < a_0 < b_0$ deux nombres réels positifs. On pose pour tout $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que les suites a_n et b_n convergent toutes les deux vers une même limite.

Exercice 14 (★★) Soient deux suites réelles définies par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

- Montrer que les suites sont bien définies.
- Montrer que a_n et b_n sont des rationnels.
- Montrer que $a_n b_n$ est stationnaire.
- Déterminer le signe de $b_n - a_n$.
- Montrer que les suites sont adjacentes et déterminer si la limite est rationnelle.

Exercice 15 (★★) Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{2^n}}$.

On désigne par α_n l'unique solution positive de l'équation : $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$.

Montrer, par récurrence sur n , la propriété : $\forall n \geq 2, \quad u_n > \alpha_n$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et trouver sa limite.

5.4 Problème classique

Exercice 16 (★★) (Divergence de $(\sin(n))_{n \geq 0}$.)

On suppose par l'absurde que $\sin(n) \rightarrow l$ admet une limite finie.

- Montrer que la suite $(\cos(n))_{n \geq 0}$ est convergente et que sa limite est $l' = l \times \frac{1 - \cos 1}{\sin 1}$.
- Déterminer les limites de $(\sin(2n))_{n \geq 0}$ et $(\cos(2n))_{n \geq 0}$ de deux manières.
- En déduire que $l = 0$ et $l' = 1$ et conclure.

Exercice 17 (★★) (Série harmonique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- Montrer que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}$.
- En déduire la limite de la suite (S_n) .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_n$. En déduire la limite de T_n .

Exercice 18 (★★) (Série divergente)

Pour tout entier $n > 0$, on pose : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}$.

- Prouver l'inégalité : $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Prouver les inégalités : $2\sqrt{n+1} - 2 < u_n < 2\sqrt{n}$. En déduire que $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ converge.
- Montrer que $u_n - 2\sqrt{n}$ est une suite décroissante et convergente.

Exercice 19 (★★★) (Lemme de Cesàro) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels.

On considère la moyenne arithmétique des premiers termes : $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j$.

- Montrer qu'on a : $\lim u_n = 0 \Rightarrow \lim v_n = 0$.
- Soit $l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\lim u_n = l \Rightarrow \lim v_n = l$.
- Montrer que : $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty$.