Semaine 6 - Du 6 au 10 Novembre 2023

Fonctions d'une variable réelles

Révision de la semaine 5

Calcul de primitives

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Primitives de référence

$x \mapsto \exp(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
$x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{x-a}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
$x \mapsto \cos(x)$, $\quad x \mapsto \sin(x)$, $\quad x \mapsto \tan(x)$,
$x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$.
$x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

Application à la recherche de primitives de $x \mapsto \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}$

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ et $x \mapsto \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

Existence de primitives

Intégrale de Riemann sans construction à ce stade.
Relation de Chasles et linéarité de l'intégrale.
Théorème fondamental, existence d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Techniques de calcul de primitives

Intégration par parties.
Changement de variables.

Liste de Questions de cours :

a) En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
b) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.
c) Enoncer puis démontrer la Formule de Leibniz.
d) Déterminer des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
e) Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$.
f) Enoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.