DM2 : Fonction de la variable réelle
à rendre le lundi 6 novembre 2023.

Exercice 1 : On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^3$.

a) Montrer que f est surjective mais pas injective.

b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

c) Montrer que $f^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$.

d) On note $A = \left\{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \operatorname{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}[+ 2\pi\mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que la restriction $g = f|_A^{\mathbb{C}^*} : A \to \mathbb{C}^*$ est une bijection.

Exercice 2 : Déterminer les domaines de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions :

a) $a(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(x) - 1}$.

b) $b(x) = \ln\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}\right)$.

c) $c(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Exercice 3 : On recherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que, pour $x \in [0, \pi/4], \tan(\pi/4 - x) = \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}$.

b) Avec le changement de variable $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2)\,\mathrm{d}u - I$.
En déduire la valeur de I.

c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x(\cos x+\sin x)}$.