

TD 10 : Les polynômes

10.1 Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 (★) Effectuer la division euclidienne de A par B :

- a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, B = X^2 + 2X + 3,$
- b) $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, B = X^3 + X + 2,$
- c) $A = X^4 - X^3 + X - 2, B = X^2 - 2X + 4,$
- d) $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, B = X^2 - 5X + 4.$

Exercice 2 (★) Déterminer les PGCD des polynômes suivants :

- a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2,$
- b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1,$
- c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2,$
- d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

10.2 Multiplicité des racines

Exercice 3 (★) Calculer l'ordre de multiplicité de α comme racine de P :

- a) $P = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$ et $\alpha = 1.$
- b) $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ et $\alpha = 2.$

Exercice 4 (★) Montrer que $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ admet que des racines simples.

Exercice 5 (★★) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ possède une racine double.

Exercice 6 (★) Calculer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de $X^{n+1} - (n+1)X + n.$

10.3 Equation polynomiales

Exercice 7 (★★) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

- a) $P' + XP = X^2 + 1$
- b) $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$

Exercice 8 (★) Déterminer les polynômes P de degré au plus 3 vérifiant :

$$P(0) = P(1) = 1, P'(0) = 0 \text{ et } P'(1) = -1.$$

10.4 Factorisation des polynômes

Exercice 9 (★) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- a) $X^6 + 1$
- b) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
- c) $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$
- d) $X^3 - X^2 - 8X + 12$ (racine double)
- e) $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$
- f) $X^8 + X^4 + 1$
- g) $X^6 - X^3 + 1$
- h) $(X+1)^6 + (X-1)^6.$

Exercice 10 (★) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + (1-3i) \text{ qui possède une racine réelle,}$$

$$6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i) \text{ qui possède deux racines réelles.}$$

10.5 Avec recherche d'idées

Exercice 11 (★★) Montrer que $X^5 - X^2 + 1$ possède une unique racine réelle.

Montrer qu'elle est irrationnelle.

Exercice 12 (★) Quelles sont les racines de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$?

Exercice 13 (★★) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P .

Exercice 14 (★★) Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ ssi a divise b .

10.6 Problèmes

Exercice 15 (★★) (Polynôme de Tchebychev) On considère la suite (P_n) de polynômes définie par

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

- a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
- b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
- c) En déduire les racines de P_n .
- d) En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 16 (★★) Pour $n \geq 1$, on définit $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = Q_n^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

- a) Calculer P_1 , P_2 et P_3 .
- b) Calculer le degré de Q_n et en déduire celui de P_n .
- c) Déterminer les multiplicités des racines de Q_n .
- d) En utilisant le théorème de Rolle, démontrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_n^{(k)}$ admet exactement k racines réelles distinctes dans $] -1, 1[$.
- e) En déduire que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
- f) En utilisant la formule de Leibniz sur le produit $Q_{n+1} = (X^2 - 1)Q_n$, démontrer que :

$$P_{n+1} = (X^2 - 1)P'_n + 2X(n+1)P_n + n(n+1)Q_n^{(n-1)}.$$

- g) En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.