

TD7 : Dérivabilité

Exercice 1 (★) Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.
- b) Pour quel point $a \in \mathbb{R}$, la réciproque f^{-1} est-elle continue, dérivable en a .

Exercice 2 (★) Montrer que $f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}$ réalise une bijection entre des intervalles que l'on déterminera. Etudier la continuité et dérivabilité de la réciproque.

Exercice 3 (★) Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et dérivable en a . Calculer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - xf(a)}{x-a}.$$

Exercice 4 (★) Soit f définie par $f(t) = (1-t)\sqrt{1-t^2}$. Déterminer les domaines sur laquelle la fonction f est définie, continue puis dérivable. Calculer lorsque cela est possible la dérivée de f .

Exercice 5 (★★) Soit f définie sur un intervalle I voisinage de 0. On suppose que f est continue et dérivable en 0 et telle que :

$$\text{pour tout } x, y \in I, f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

- a) Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $] -a, a[$ tel que $|f(x)| < \frac{1}{2}$.
- b) Montrer que f est continue sur $] -a, a[$.
- c) Montrer que f est dérivable sur $] -a, a[$ et calculer sa dérivée.
- d) En déduire la fonction f .

7.1 Théorème des accroissements finis

Exercice 6 (★★) (Règle de l'Hôpital) Soit I un intervalle et $a \in I$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I tels que $f(a) = g(a) = 0$ et g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

- a) Soit $x > a$. Montrer qu'il existe $c(x) \in]a, x[$ tel que $f'(c(x))g(x) = g'(c(x))f(x)$.
- b) Montrer que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.
- c) On suppose que $\lim_a f'/g'$ existe. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exercice 7 (★★) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Exercice 8 (★★) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 (★★) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction dérivable non constante telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est l'application identité de $[0, 1]$.

7.2 Fonctions convexes

Exercice 10 (★) Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.
- b) Montrer que si $f : I \rightarrow f(I)$ est strictement croissante alors f^{-1} est concave.

Exercice 11 (★★) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, on a l'inégalité de Jensen :

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

- b) En déduire que pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.