DM2 - Corrigé

Exercice 1 : a) Soit $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$. On a $z = \left(\sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3}\right)^3 \in f(\mathbb{C})$.
Donc $\mathbb{C} = f(\mathbb{C})$ et l'application est surjective.
On a $f(1) = f(j) = 1$ donc f n'est pas injective.

b) On démontre que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ par double inclusion.
($\subset$) Pour $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$ donc $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
($\supset$) Réciproquement, si $y \in \mathbb{R}$ alors pour $y \geq 0, y = f(\sqrt[3]{y}) \in f(\mathbb{R})$.
Et si $y < 0$ alors $y = -|y| = -(\sqrt[3]{|y|})^3 = (-\sqrt[3]{|y|})^3 \in f(\mathbb{R})$.
De même, on obtient $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ par double inclusion.
($\subset$) Pour $u \in \mathbb{U}$, on a $|f(u)| = |u^3| = 1$ donc $f(u) \in \mathbb{U}$.
($\supset$) Et pour $v = e^{i\theta}\mathbb{U}$, on pose $u = e^{i\theta/3} \in \mathbb{U}$. Donc $v = f(u) \in f(\mathbb{U})$.

c) On a démontre $f^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$ par équivalence.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $z \in f^*(\mathbb{R})$ ssi $f(z) \in \mathbb{R}$
ssi $z = 0$ ou $\mathrm{Arg}(z^3) = 0[\pi]$
ssi $z = 0$ ou $\mathrm{Arg}(z) = 0[\pi/3]$
ssi $z = 0$ ou $z \in e^{ik\pi/3}\mathbb{R}_+^*$ avec $k \in [\![0, 5]\!]$
ssi $z = 0$ ou $z \in \omega\mathbb{R}_+^*$ avec $\omega \in \mathbb{U}_6$.
Donc $f^*(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^* \cup (-1)\mathbb{R}_+^* \cup j\mathbb{R}_+^* \cup (-j)\mathbb{R}_+^* \cup j^2\mathbb{R}_+^*(-j^2)\mathbb{R}_+^*$
$= \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$.
Car $u\mathbb{R} = \{0\} \cup u\mathbb{R}_+^* \cup (-u)\mathbb{R}_+^*$ pour $u \in \mathbb{C}^*$.

d) L'application g est injective car si $z_1, z_2 \in A$ vérifie $f(z_1) = f(z_2)$. Alors $z_1^3 = z_2^3$ montre que $|z_1| = |z_2|$ et $\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)[2\pi/3]$. Mais la propriété, $\mathrm{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}[+2\pi\mathbb{Z}$ permet d'avoir $\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)[2\pi]$. Puis $z_1 = z_2$ car par identification des modules et des arguments.
L'application est surjective car pour $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. L'antécédent de la question a. $w = \sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}$ convient et $w \in A$ car $\theta/3 \in [0, 2\pi/3[$.
Ainsi par définition g est bijective.

Exercice 2 : a) On a $\mathrm{ch}\,(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec égalité ssi $x = 0$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}\,(x) - 1$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée.
Pour $x \neq 0$, on a : $a'(x) = \mathrm{sh}\,(x)\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,(x)-1}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$. Et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) > 0$ ssi $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[$.
Donc par opérations, b est de classe C^∞ sur $]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[$.
Pour $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[$, on a $b(x) = \ln(x^2 - 2x + 3) - \ln(x^2 - 1)$.
Donc $b'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2(x^2-4x+1)}{(x^2-2x+3)(x^2-1)}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$ ssi $x \in \mathbb{R}_+^*$.
En effet $1 - \frac{1-x}{1+x} = \frac{2x}{1+x} > 0$ ssi $x > 0$ ou $x < -1$.
Et $\frac{1-x}{1+x} - (-1) = \frac{2}{1+x} > 0$ ssi $x > -1$.
Donc par opération c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x > 0$, on a $c'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-[(1-x)/(1+x)]^2}}$
$= \frac{2}{(1+x)^2}\frac{-\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{(1+2x+x^2)-(1-2x+x^2)}}$
$= \frac{-2}{(1+x)\sqrt{4x}} = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Exercice 3 : a) Pour $x \in [0, \pi/4], \tan(\pi/4 - x) = \frac{\tan(\pi/4)+\tan(-x)}{1-\tan(\pi/4)\tan(-x)} = \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}$.
Car $\tan(\pi/4) = 1$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

b) On pose $u = \pi/4 - x$ et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Donc $I = \int_{\pi/4}^{0} \ln(1 + \tan(\pi/4 - u)(-\mathrm{d}u)$
$= \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(\pi/4 - u))\,\mathrm{d}u$
$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u$ d'après a.
$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u$
$= \int_0^{\pi/4} \ln(2)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan u)\,\mathrm{d}u$ par linéarité
$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$.
Donc $I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$ montre que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

c) On a $I = \int_0^{\pi/4} 1 \times \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$
$= [x\ln(1+\tan(x))]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$
$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - 0 - \int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x(\cos x+\sin x)}$.
On en déduit que $\int_0^{\pi/4} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x(\cos x+\sin x)} = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.