DS3 - Corrigé

Exercice 1 : a) On décompose en éléments simple la fraction rationnelle.
La division euclidienne est $X^3 = (X^2 - 4X + 5)(X + 4) + (11X - 20)$.
Ainsi $\dfrac{t^3}{t^2 - 4t + 5} = t + 4 + \dfrac{11t - 20}{(t-2)^2 + 1^2}$
$= t + 4 + \dfrac{A(t-2)}{(t-2)^2 + 1^2} + \dfrac{B}{(t-2)^2 + 1^2}$.
En identifiant les numérateur on obtient $A = 11$ et $-2A + B = -20$ donc $B = 2$.
Ainsi $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{t^2 - 4t + 5}\,\mathrm{d}t$
$= \left[\dfrac{t^2}{2} + 4t + \dfrac{11}{2}\ln((t-2)^2 + 1^2) + 2\mathrm{Arctan}\,(t-2)\right]_1^2$
$= 2 + 8 + \dfrac{11}{2}\ln(1) + 2\mathrm{Arctan}\,(0) - \dfrac{1}{2} - 4 - \dfrac{11}{2}\ln(2) - 2\mathrm{Arctan}\,(-1)$
$= \dfrac{11}{2} - \dfrac{11}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

b) On réalise le changement de variables $\begin{cases} u &= e^t \\ \mathrm{d}u &= e^t\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

On a $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$
$= \displaystyle\int_0^x \frac{2\,\mathrm{d}t}{e^t + e^{-t}}$
$= \displaystyle\int_0^x \frac{2e^t\,\mathrm{d}t}{(e^t)^2 + 1}$
$= \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2 + 1}$
$= [2\mathrm{Arctan}\,(u)]_1^{e^x}$
$= 2\mathrm{Arctan}\,(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$.

c) On réalise le changement de variables $\begin{cases} u &= \tan\theta \\ \mathrm{d}u &= \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$.

On a : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$
$= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta\cos\theta}{\cos\theta + \tan\theta\cos\theta}\cos^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ car $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$
$= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta}\frac{1}{1 + \tan^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ car $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + \tan^2\theta}$
$= \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
On réalise la décomposition $\dfrac{u}{(u+1)(u^2+1)} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{Bu}{u^2+1} + \dfrac{C}{u^2+1}$.

On trouve le système $\begin{cases} A+B &= 0 \\ B+C &= 1 \\ A+C &= 0 \end{cases}$ donnant $A=-1/2, B=C=1/2$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{(u+1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$

$= \left[(-1/2)\ln|u+1| + (1/4)\ln|u^2+1| + (1/2)\mathrm{Arctan}\,(u)\right]_0^1$

$= -\dfrac{1}{4}\ln(2) + \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 2 : a) On écrit $y'(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}y(t) - \dfrac{e^t}{t^2-1}$.

C'est une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient non constant $a(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ avec second membre $b(t) = -\dfrac{e^t}{t^2-1}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

On se place sur $I =]-1,1[$ l'intervalle qui contient la condition initiale.

On a $a(t) = 1 + \dfrac{2}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$.

Donc $A(t) = t + \ln|t-1| - \ln|t+1| = t + \ln\dfrac{1-t}{1+t}$ est une primitive de $a(t)$ sur I.

Puis $y_H(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^t \dfrac{1-t}{1+t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Avec la méthode de Lagrange, on recherche $\begin{cases} y_P(t) &= K(t)e^t\dfrac{1-t}{1+t} \\ y_P'(t) &= K'(t)e^t\dfrac{1-t}{1+t} + K(t)e^t\dfrac{1-t}{1+t} + K(t)e^t\dfrac{-2}{(1+t)^2} \end{cases}$

Donc $e^t = (1-t^2)y_P'(t) + (1+t^2)y_P(t)$

$= (1-t^2)K'(t)e^t\dfrac{1-t}{1+t} + (1-t^2)K(t)e^t\dfrac{(1-t)(1+t)-2}{(1+t)^2} + (1+t^2)K(t)e^t\dfrac{1-t}{1+t}$

$= (1-t)^2K'(t)e^t + K(t)e^t\dfrac{(1-t^2)(1-t^2-2) + (1+t^2)(1-t)(1+t)}{(1+t)^2}$

$= (1-t)^2K'(t)e^t + 0$.

Donc $K'(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2}$ puis $K(t) = \dfrac{-1}{t-1} = \dfrac{1}{1-t}$.

Ainsi $y_P(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$.

Il recherche à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $y(t) = \lambda e^t\dfrac{1-t}{1+t} + \dfrac{e^t}{1+t}$ vérifie $y(0)=1$.

Ainsi $\lambda + 1 = 1$ donc $\lambda = 0$.

Donc $y(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$ est la solution du problème de Cauchy sur I.

b) On résout $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t)$. C'est une EDL2 à coefficients constants avec second membre $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$.

Le polynôme caractéristique est $X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$. On introduit les solutions homogènes génératrices $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{-2t}$.

On recherche une solution de la forme $\begin{cases} y_P(t) & = ae^{it} \\ y_P'(t) & = iae^{it} \\ y_P''(t) & = -ae^{it} \end{cases}$.

On a $e^{it} = (-a + 3ia + 2a)\, e^{it}$.

Donc $a(1 + 3i) = 1$ puis $a = \dfrac{1}{1 + 3i} = \dfrac{1 - 3i}{10}$.

Donc $y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t} + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1 - 3i}{10}(\cos t + i \sin t)\right)$

$= \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t} - \dfrac{3}{10}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t$

Puis $y'(t) = -\lambda_1 e^{-t} - 2\lambda_2 e^{-2t} + \dfrac{3}{10}\sin t + \dfrac{1}{10}\cos t$.

Donc les conditions $y(0) = y'(0) = 0$ donne $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \dfrac{3}{10} & = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \dfrac{1}{10} & = 0 \end{cases}$

On résout ce système en $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_2 = -1/5$.

Donc $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{1}{5}e^{-2t} - \dfrac{3}{10}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t$

Problème I : 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Si n est pair alors $f(n\pi) = \operatorname{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Si n est impair alors $f(n\pi) = \operatorname{Arccos}(1) = 0$.

2. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

La fonction $y \mapsto \sqrt{(1 - y)/2}$ est continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

La fonction $z \mapsto \operatorname{Arccos}(z)$ est continue sur $[0, 1]$.

Donc la composée est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $f(x + 2\pi) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos(x + 2\pi)}{2}}\right)$

$= \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}\right)$ car $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

$= f(x)$. Donc f est 2π-périodique.

Puis $f(-x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos(-x)}{2}}\right)$

$= \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}\right)$ car $\cos(-x) = \cos(x)$

$= f(x)$. Donc f est paire.

3. La fonction $y \mapsto \sqrt{(1 - y)/2}$ est continue mais pas dérivable en $y = 1$.

On obtient $x \equiv \pi[2\pi]$ avec $y = \cos x$.

La fonction $z \mapsto \operatorname{Arccos}(z)$ est continue mais pas dérivable en $z = 1$.

Donc on obtient $y = -1$ en résolvant $z = \sqrt{(1 - y)/2}$. Puis $x \equiv 0[2\pi]$.

Ainsi la fonction f est dérivable (et de classe C^∞) sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} =]0, \pi[+ \pi\mathbb{Z}$.

Pour $x \in]0,\pi[+\pi\mathbb{Z}$, on a $f'(x) = \dfrac{\sin x}{2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{(1-\cos x)/2}} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{(1-\cos x)/2})^2}}$

$= \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}$

$= \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}}$

$= \dfrac{-\sin x}{2|\sin x|}$ -> attention $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$ dépend du signe.

4. Sur le domaine $]0,\pi[$, on a $f'(x) = \dfrac{-1}{2}$ car $|\sin x| = \sin x > 0$.

   Donc on obtient $f(x) = \dfrac{-x}{2} + C$ en intégrant.

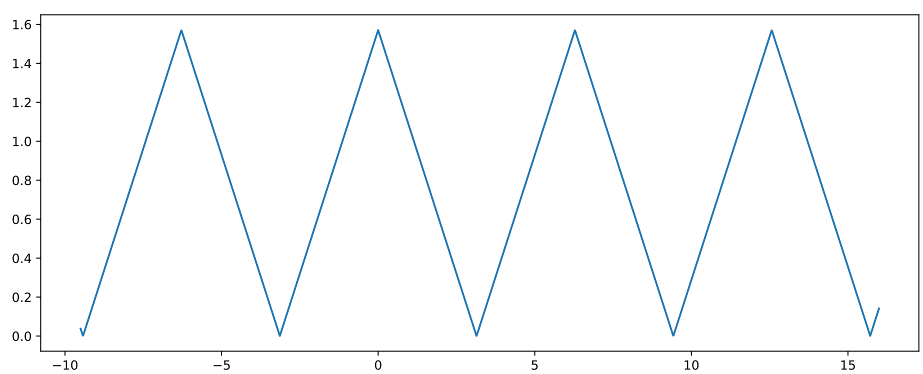
   La continuité de f en 0 donne $C = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après le a).

   Sur le domaine $]-\pi,0[$, on peut utiliser la parité de f.

   Ainsi pour $0 < x < \pi, f(-x) = f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|-x|}{2}$.

   Donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|x|}{2}$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$.

5. La périodicité de la fonction permet de faire la tracé car nous connaissons l'allure sur $[-\pi,\pi]$ une période fondamentale.



Problème II : 1. La fonction est non nulle donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. Puis en $x = a$ et $y = 0$ on obtient : $f(a) = 2f(a)f(0)$ d'où $1 = 2f(0)$. Ainsi $f(0) = 1/2$.

2. On suppose par l'absurde qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = 0$ alors pour $x = b$ et $y = -b$, on obtient $f(0) = 2f(b)f(-b) = 0$ ce qui est absurde. Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} - \{t\}$ au voisinage épointé de t.

   On calcul la limite du taux d'accroissement : $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$

   $= \dfrac{f(t+(x-t))-f(t)}{x-t}$

   $= \dfrac{f(t)[2f(x-t)-1]}{x-t}$ d'après l'équation fonctionnelle

$= 2f(t)\dfrac{f(x-t)-f(0)}{(x-t)-0}$ car $f(0) = 1/2$
$\rightarrow_{x\to t} 2f(t)f'(0)$ car f est dérivable en 0.
Donc f est dérivable en t et $f'(t) = 2f(t)f'(0) = 2\omega f(t)$.

4. Ainsi f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) & = 2\omega y(t) \\ y(0) & = 1/2 \end{cases}$.
   Les solutions de $y' = 2\omega y$ sont de la forme $y(x) = \lambda e^{2\omega x}$.
   Puis $f(0) = 1/2$ donne $f(x) = \dfrac{e^{2\omega x}}{2}$.
   Reste à faire la faire la synthèse. Pour $x, y \in \mathbb{R}$,
   on a $f(x+y) = \dfrac{e^{2\omega(x+y)}}{2} = 2\dfrac{e^{2\omega x}}{2}\dfrac{e^{2\omega y}}{2} = 2f(x)f(y)$.
   Toutes ces fonctions vérifient l'équation fonctionnelle à résoudre.