

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 3
le samedi 18 novembre 2023 - durée 3h

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_1^2 \frac{t^3}{t^2-4t+5} dt.$
- b) $\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ avec $u = e^t.$
- c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$ avec $u = \tan \theta.$

Exercice 2 : Résoudre les problème de Cauchy suivants :

- a) $\begin{cases} (1-t^2)y'(t) + (1+t^2)y(t) = e^t \text{ pour } t \in]-1, 1[\\ y(0) = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Problème I : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $f(x) = \operatorname{Arccos} \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \right)$ lorsque cela est possible.

- 1. Calculer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de la parité de n .
- 2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} , 2π -périodique et paire.
- 3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
- 4. Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{|x|}{2}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
- 5. Tracer le graphe de $y = f(x)$ pour $x \in [-3\pi, 5\pi]$.

Problème II : On recherche à résoudre l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

On suppose la fonction f non nulle, continue sur \mathbb{R} et dérivable en 0. On note $\omega = f'(0)$.

- 1. Déterminer la valeur de $f(0)$.
- 2. Montrer que la fonction ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- 3. Montrer que la fonction est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2\omega f(t)$.
- 4. En déduire la solution de l'équation fonctionnelle en fonction de ω .