

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 3  
le samedi 18 novembre 2023 - durée 3h

**Exercice 1 :** Calculer les intégrales suivantes :

- a)  $\int_1^2 \frac{t^3}{t^2-4t+5} dt.$
- b)  $\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$  avec  $u = e^t.$
- c)  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$  avec  $u = \tan \theta.$

**Exercice 2 :** Résoudre les problème de Cauchy suivants :

- a)  $\begin{cases} (1-t^2)y'(t) + (1+t^2)y(t) = e^t \text{ pour } t \in ]-1, 1[ \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \sin(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

**Problème I :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On considère  $f(x) = \operatorname{Arccos} \left( \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \right)$  lorsque cela est possible.

- 1. Calculer  $f(n\pi)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  en fonction de la parité de  $n$ .
- 2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et paire.
- 3. Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$ .
- 4. Montrer que  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{|x|}{2}$  pour  $x \in [-\pi, \pi]$ .
- 5. Tracer le graphe de  $y = f(x)$  pour  $x \in [-3\pi, 5\pi]$ .

**Problème II :** On recherche à résoudre l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

On suppose la fonction  $f$  non nulle, continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable en 0. On note  $\omega = f'(0)$ .

- 1. Déterminer la valeur de  $f(0)$ .
- 2. Montrer que la fonction ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
- 3. Montrer que la fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 2\omega f(t)$ .
- 4. En déduire la solution de l'équation fonctionnelle en fonction de  $\omega$ .