

DM3 : Suites numériques  
à rendre le lundi 11 décembre 2023.

**Exercice 1 :** Etudier les suites récurrentes et préciser les valeurs des limites si elles existent.

1.  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_{n+1} = 4u_n - 3$  et  $u_0 = 2$ .
2.  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par  $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$  et  $v_0 = -v_1 = 2$ .
3.  $(w_n)_{n \geq 0}$  définie par  $w_{n+2} = w_{n+1} - 2w_n$  et  $w_0 = w_1 = 1$ .
4.  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie par  $a_{n+1} = a_n e^{-a_n}$  et  $a_0 = 1$ .

**Exercice 2 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .
2. Etudier la monotonie des suites  $u_n = S_n - \ln(n)$  et  $v_n = S_{n-1} - \ln(n)$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une limite commune.
4. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .
5. Montrer que, pour tout entier  $p \geq 2$ , on a :

$$\left( \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(p).$$