

DM3 : Suites numériques
à rendre le lundi 11 décembre 2023.

Exercice 1 : Etudier les suites récurrentes et préciser les valeurs des limites si elles existent.

1. $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_{n+1} = 4u_n - 3$ et $u_0 = 2$.
2. $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$ et $v_0 = -v_1 = 2$.
3. $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par $w_{n+2} = w_{n+1} - 2w_n$ et $w_0 = w_1 = 1$.
4. $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_{n+1} = a_n e^{-a_n}$ et $a_0 = 1$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. Etudier la monotonie des suites $u_n = S_n - \ln(n)$ et $v_n = S_{n-1} - \ln(n)$.
3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune.
4. En déduire la limite de la suite (S_n) .
5. Montrer que, pour tout entier $p \geq 2$, on a :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(p).$$