DM3 - Corrige

Exercice 1 :

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique.
   On recherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 4l - 3$ d'où $l = 1$.
   Puis la suite $(u_n - 1)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 4 d'où :
   $u_n - 1 = 4^n(u_0 - 1) = 4^n$. Enfin $u_n = 4^n + 1 \to +\infty$.
2. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
   Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
   D'où $v_n = (an+b)1^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Les conditions initiales donnent $b = v_0 = 2$ et $a + b = v_1 = -2$
   donc $u_n = -4n + 2 \to -\infty$.
3. La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
   Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 2 = (X - z)(X - \bar{z})$ avec $z = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.
   Posons $\theta = \mathrm{Arctan}\,(\sqrt{7})$. On a $z = \sqrt{2}e^{i\theta}$.
   D'où $w_n = (\sqrt{2})^n(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta))$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Les conditions initiales donnent $a = w_0 = 1$ et $\sqrt{2}(a\cos\theta + b\sin\theta) = w_1 = 1$.
   Donc $a = 1$ et $b = \frac{2-a}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.
   La suite diverge sans limite car elle est non majorée et non minorée.
4. On recherche les points fixe $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = le^{-l}$ ssi $l = 0$.
   On note $f(x) = xe^{-x}$. On a $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   Donc $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle stable et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.
   On a $a_{n+1} - a_n = a_n(e^{-a_n} - 1) < 0$ car $e^{-a_n} < 1$ lorsque $a_n > 0$. Donc la suite est décroissante.
   D'après le théorème de la limite monotone, elle convergence vers $l = 0$ l'unique point fixe.

Exercice 2 :

1. La fonction $\ln(1+x) - x$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et sa dérivée est $\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. Donc elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet un maximum global en 0. Donc pour tout $x > -1, \ln(1+x) - x \leq \ln(1+0) - 0 = 0$.
2. On calcul les accroissements :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{n+1}\right) \leq 0 \text{ avec } x = \frac{-1}{n+1} > -1 \end{aligned}$$
   Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   De manière analogue, on trouve $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante :
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0 \text{ avec } x = \frac{1}{n} > -1. \end{aligned}$$
3. On montre que les suites sont adjacentes. On dispose des conditions de monotonies. La différence : $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et tend vers 0, donc u_n et v_n sont adjacentes et admettent une limite commune notée γ .
4. On a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln(n) \to +\infty$ par opération.
5. On a : $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = S_{pn} - S_n$
   $= u_{np} + \ln(np) - u_n - \ln(n) = u_{np} - u_n + \ln(p) \to \gamma - \gamma + \ln p = \ln p$.