Mathématiques - DS n° 4

Exercice 1 : a) Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers. On a l'encadrement $3^k\sqrt{2} - 1 < \lfloor 3^k\sqrt{2}\rfloor \leq 3^k\sqrt{2}$.

Puis $3^{-n}\sum_{k=0}^{n} 3^k\sqrt{2} - 1 < 3^{-n}\sum_{k=0}^{n}\lfloor 3^k\sqrt{2}\rfloor \leq 3^{-n}\sum_{k=0}^{n} 3^k\sqrt{2}$.

Donc $S_n - \dfrac{n+1}{3^n} \leq u_n \leq S_n$ avec $S_n = 3^{-n}\sum_{k=0}^{n} 3^k\sqrt{2}$.

Or on peut calculer $S_n = 3^{-n}\sum_{k=0}^{n} 3^k\sqrt{2} = 3^{-n}\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}\sqrt{2} \sim_{+\infty} \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\dfrac{3^n}{3^n} \to \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

Or $\dfrac{n+1}{3^n} \to 0$ car $n << 3^n$. Ainsi par théorème d'encadrement $u_n \to \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

b) On pose $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On résout $f(l) = l$ ssi $l^2 - l + \dfrac{3}{16} = 0$ ssi $l = 1/4$ ou $l = 3/4$.

On note $I =]1/4, 3/4[$. On a $f(I) =]f(1/4), f(3/4)[= I$ est un intervalle stable.

On a $v_0 \in I$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in I$.

On calcul $v_{n+1} - v_n = v_n^2 - v_n + 3/16 = (v_n - 1/4)(v_n - 3/4) < 0$ car $v_n \in I$ est entre les deux racines. Donc la suite (v_n) est décroissante.

D'après le théorème de la limite monotone elle tend vers une limite finie l vérifiant $1/4 \leq l \leq v_n \leq v_0 < 3/4$. Donc $l = 1/4$ est la limite de la suite autonome.

c) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est $q^2 - q + 1 = (q - e^{i\pi/3})(q - e^{-i\pi/3})$.

Donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $w_n = 1^n(\lambda_1\cos(n\pi/3) + \lambda_2\sin(n\pi/3))$.

Les conditions initiales donne $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_1\dfrac{1}{2} + \lambda_2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $w_n = \cos(n\pi/3)$ est une suite qui diverge sans limite.

Exercice 2 : a) On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\
&= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{-(2n+1) + (2n+2)}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+2) - (2n+3)}{(2n+3)(2n+2)} \\
&= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)}
\end{aligned}$$

b) La question a) montre que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

Puis $v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0$.

Donc les suites sont adjacentes et convergent vers l.

De plus $u_0 = 0 \leq l \leq v_0 = 1$. D'où $l \in [0,1]$.

c) On a démontrer les deux sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) admettent une limite commune. Donc la suite (S_n) admet une unique valeur d'adhérence et elle converge vers l.

Problème I : 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$. Donc f est paire.

2. On a $f(x_{n+1}) = f(x_n^2) = f(x_n)$. Donc la suite est constante.

3. (a) Si $x_0 = 0$ alors la suite $x_n = 0$ est constante et tend vers 0.
   Si $x_0 > 0$ alors par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
   On pose $u_n = \ln(x_n)$. Elle vérifie $u_{n+1} = \ln(x_n^2) = 2\ln(x_n) = 2u_n$.
   Donc $u_n = 2^n u_0 = 2^n \ln(x_0) \to -\infty$ car $\ln x_0 < 0$.
   Ainsi $x_n = \exp(u_n) \to 0$.

   (b) On a $f(x_n) = f(x_0) \to f(x_0)$ car constante.
   Et $f(x_n) \to f(0)$ car la fonction est continue en 0.
   Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x_0) = f(0) = A$ une constante.
   Or on a également $f(-x_0) = f(x_0) = f(0)$ car la fonction est paire.
   Donc pour tout $x \in]-1,1[, f(x) = A$ est constante.

4. On peut également démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 1$.
   Puis que $u_n = \ln(x_n) = 2^n \ln(x_0) \to +\infty$. Donc $x_n = \exp(u_n) \to +\infty$.
   Pour conclure, il faudrait savoir que f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Afin de démontrer que $f(x_0) = l$ est constant. Ceci n'est pas une hypothèse de l'énoncé.

5. (a) Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, y_n > 1$. Ceci justifie la bonne définition de la racine carrée (et donc de la suite).
   On a $f(y_{n+1}) = f(\sqrt{y_n}) = f(\sqrt{y_n}^2) = f(y_n)$. Donc $(f(y_n))$ est une suite constante.

   (b) On a $y_{n+1} - y_n = \sqrt{y_n} - y_n = \sqrt{y_n}(1 - \sqrt{y_n}) < 0$ car $y_n > 1$. Donc la suite (y_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone elle converge vers $l \geq 1$ une limite finie. Puis $l = \sqrt{l}$ ssi $l \in \{0,1\}$. Donc $l = 1$ et $y_n \to 1$.

   (c) On en déduit que $f(y_n) = f(x_0) \to f(x_0)$ et $f(y_n) \to f(1)$.
   Par unicité de la limite $f(x_0) = f(1) = B$ est donc constante sur $]-1,+\infty[$.

6. Si $x \in [0,1[$ alors $f(x) = A \to_{x\to 1^-} A$.
   Si $x \in]1,2]$ alors $f(x) = B \to_{x\to 1^+} B$.
   Or f est continue en 1 par hypothèse. Donc $A = \lim\limits_{1^-} f = f(1) = \lim\limits_{1^+} f = B$.
   Ainsi comme $A = f(0)$ et $B = f(1)$. On a démontré que $f(0) = f(1)$.
   Puis f est constante sur $\mathbb{R}_+$ donc par parité elle est constante sur $\mathbb{R}$.
   La synthèse est immédiate :
   Toutes les fonctions constantes sont continues et vérifie $f(x^2) = f(x)$.

Problème II : 1. (a) On a $\dfrac{\ln(t)}{t-1} = \dfrac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1} \to_{t\to 1} \ln'(1) = 1$.

(b) On a $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}\dfrac{\ln x}{x-1} \to \dfrac{1}{2}$.

Donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

(c) On a $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \sim_{x\to 0} -x\ln(x) \to_{x\to 0} 0$ par croissance comparée.
Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

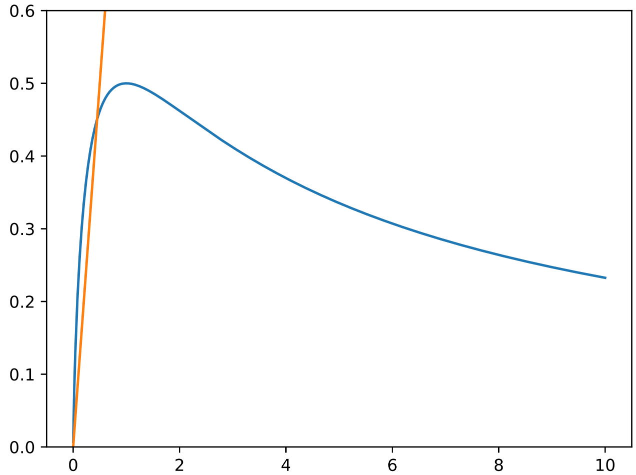
2. (a) La fonction f est dérivable (et même C^∞) par opération sur D_f. Pour $x \in D_f$, on a : $f'(x) = \dfrac{(\ln x + x/x)(x^2-1) - 2x^2\ln x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{(x^2-1)-(x^2+1)\ln x}{(x^2-1)^2}$.

(b) On pose $g(u) = \dfrac{1}{2}\ln u - \dfrac{u-1}{u+1}$. La fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$g'(u) = \dfrac{1}{2u} - \dfrac{(u+1)-(u-1)}{(u+1)^2} = \dfrac{(u+1)^2-4u}{2u(u+1)^2} = \dfrac{(u-1)^2}{2u(u+1)^2} > 0$.
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(1) = 0$. Donc $\forall u > 1, g(u) > g(1) = 0$.
On a également $\forall u < 1, g(u) < g(1) = 0$.

(c) On écrit $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x\right)$.
En posant $u = x^2$, on a $\ln u = 2\ln x$. Donc $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x = \dfrac{u-1}{u+1} - \dfrac{1}{2}\ln u$.
Pour tout $x \in D_f$, on a $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \geq 0$.
Et si $x > 1$ alors $u = x^2 > 1$, donc $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x = -g(u) < 0$.
Et si $x < 1$ de même, on obtient $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x = -g(u) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

3. (a) La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0,1]$ d'après les questions précédentes.
Puis $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1/2]$. Le théorème de la bijection continue permet donc de conclure.

(b) On a $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x} \to 0$.
Il y a donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.



(c) On introduit $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est décroissante sur $[1, +\infty[$ car $g'(x) = f'(x) - 1 \leq -1$. Puis $g(1) = f(1) - 1 = (1/2) - 1 = -(1/2) < 0$. Donc pour tout $x \geq 1, g(x) \leq g(1) < 0$ ne s'annule pas.
Ainsi la fonction f n'admet pas de point fixe dans $[1, +\infty[$.