DM3 : Continuité et dérivabilité
à rendre le lundi 8 Janvier 2024.

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes :

- Déterminer sur quel ensemble la fonction est continue.
- La continuité se prolonge-t-elle aux bornes éventuelles ?
- La fonction est-elle minorée ou majorée ?

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}$.
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x}{(\sqrt{1+x}-1)(1-x)^2}$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{x-E(x)}{x+E(x)}$.

Exercice 2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
On suppose f (resp. g) est M_f-lipschitzienne (resp. M_g-lipschitzienne).

a) Montrer que $g \circ f$ est $M_g M_f$-lipschitzienne.

b) On suppose que $f(I) \subset I$.
Montrer que $f^n = f \circ f \circ f ... \circ f$ est M_f^n-lipschitzienne.

c) Montrer que si pour f est $1/n$-lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est constante.

d) Montrer que $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 1-lipschitzienne.

e) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. En déduire que $x \mapsto \operatorname{Arctan}(ax+b)$ et $x \mapsto a\sin(x)+b$ sont a-lipschitzienne.

Exercice 3 : Soit f une fonction convexe de classe C^2 sur $I = [a, b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$.

a) Montrer qu'il existe un $\alpha \in I$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.

b) Montrer qu'un tel zéro $\alpha \in I$ est unique. (Indication : On pourra raisonner par l'absurde et dresser alors le tableau de variation de f, f' et f'').

c) Montrer que f est strictement croissante sur $J = [\alpha, b]$.

Définissons l'application $\varphi : J \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

d) Montrer que φ est bien définie de classe C^1 et est croissante sur J.

e) Montrer que pour tout $x \in J, \alpha \leq \varphi(x) \leq x$.

f) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, tend vers α.