# DM4 - Corrigé

**Exercice 1 :** 1. La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car les polynômes $x^2+2x+2$ et $x^2+x+3$ n'admettent pas de racines réelles. De plus, on peut calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. On a par la quantité conjuguée :
$f_1(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)-(x^2+x+3)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}}$
$= \dfrac{x-1}{x(\sqrt{1+2/x+2/x^2}+\sqrt{1+1/x+3/x^2})} \to_{x\to\pm\infty} 1.$
La fonction est donc bornée sur un voisinage $]-\infty, A]$ et un voisinage $[B, +\infty[$ car la fonction est alors proche de 1. Or sur le segment $[A, B]$, la fonction est continue donc d'après le théorème du maximum $f$ atteint ses bornes. En conclusion, $f$ est majorée et minorée sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{(\sqrt{1+x}-1)(1-x)^2}$ est définie et continue sur $[-1, +\infty[-\{0,1\}$ par opérations. On peut étudier les prolongements éventuelles en 0 et 1. On a $\lim\limits_{0} f = 2$ à l'aide de la quantité conjugué. Donc $f$ se prolonge en 0 avec $f(0) = 2$. Puis $\lim\limits_{1} f = +\infty$. Donc $f$ n'est pas majorée. Enfin $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ donc $f$ est minorée.

3. La fonction $f_3 : x \mapsto \dfrac{x - E(x)}{x + E(x)}$ est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ par opérations.
Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on peut calculer les limites à droite et à gauche :
$\lim\limits_{n^+} f_3 = \dfrac{n-n}{n+n} = 0$ et $\lim\limits_{n^-} f_3 = \dfrac{n-(n-1)}{n+(n-1)} = \dfrac{1}{2n-1}$.
Donc les limites à droite et à gauche sont différentes.
Etude en $0^+$ : Pour $x \in ]0,1[$, on a $f_3(x) = \dfrac{x-0}{x+0} = 1$.
Etude en $0^-$ : pour $x \in ]-1,0[$, $f_3(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \to_{x\to 0} -1$.
Donc $f$ n'est pas prolongeable aux entiers.
De plus par encadrement, on trouve $-1 \leq f_3(x) \leq 1$. Donc $f_3$ est une fonction bornée.

**Exercice 2 :** a) Pour $x, y \in I$, on a $f(x), f(y) \in J$.
Donc $|g(f(x)) - g(f(y))| \leq M_g|f(x) - f(y)| \leq M_g M_f |x-y|$.
Ainsi $g \circ f$ est, par définition, $M_g M_f$-lipschitzienne.

b) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $f$ est $M_f$-lipschitzienne.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n$ est $M_f^n$-lipschitzienne.
On a $f^{n+1} = f^n \circ f$ avec $f(I) \subset I$. D'après la question a), avec $g = f^n$, on en déduite que la composée est $M_f^n.M_f$-lipschitzienne. Ainsi on a bien $f^{n+1}$ est $M_f^{n+1}$-lipschitzienne.

c) Soit $x, y \in I$. On a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{n}|x-y| \to_{n\to+\infty} 0$.
Donc $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in I$ i.e. $f$ est une fonction constante.

d) Les fonctions Arctan et sin sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}'(x)| = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ et $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$.
Donc d'après l'inégalité des accroissement finies, ce sont des fonctions 1-lipschitzienne.

e) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction affine $f(x) = ax + b$ est $|a|$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a||x-y|$. Donc $x \mapsto \text{Arctan}(ax+b)$ est $1.|a|$-lipschitzienne en tant que composée Arctan $\circ f$. Et $x \mapsto a\sin(x) + b$ sont $|a|.1$-lipschitzienne en tant que composée $f \circ \sin$.

**Exercice 3 :** a) La fonction $f$ est continue car $C^2$ et prend des valeurs négatives et positives sur le segment $[a,b]$. Donc d'après le TVI il existe un $\alpha \in ]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$.

b) Soient $\alpha_1 < \alpha_2$ deux zéros distincts de la fonction. Alors d'après le théorème de Rolle il existe un $\beta \in ]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que $f'(\beta)=0$. Or $f'' \geq 0$ donne $f'$ croissante. Puis on obtient $f'$ négative sur $[a,\beta]$ et positive sur $[\beta,b]$. Donc $f$ est décroissante sur $[a,\beta]$ et en particulier $f(a) \geq f(\alpha_1) = 0$. Ce qui est absurde car $f(a) < 0$. Donc $f$ admet une unique racine $\alpha$ dans $[a,b]$.

c) D'après le TAF, il existe $c \in [a,\alpha]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha - a} = \dfrac{-f(a)}{\alpha - a} < 0$.
La condition $f'' \geq 0$ donne $f'$ croissante.
Donc pour tout $x \geq \alpha$, $f'(x) \geq f'(\alpha) \geq f'(c) > 0$.
Donc $f$ est strictement croissante sur $J = [\alpha, b]$.

d) $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $J$ car $f'$ est $C^1$ et ne s'annule pas sur $J$. Pour $x \in J$, on calcule :
$\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \geq 0$.
Donc $\varphi$ est croissante sur $J$.

e) Pour tout $x \geq \alpha$ par croissance de $\varphi$ on a : $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) = \alpha - f(\alpha)/f'(\alpha) = \alpha$. Et d'autre part, $x - \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$.

f) D'après la question précédente on a pour tout entier : $\alpha \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq u_n$. Donc la suite est décroissante et minorée par $\alpha$, la suite converge vers une limite $l$. En passant à la limite dans l'expression : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, on obtient $l = \varphi(l)$ c'est à dire $l = l - f(l)/f'(l)$ puis $f(l) = 0$ par unicité du zéro on a $l = \alpha$.