DS n° 5 - Corrigé

Exercice 1 : 1. (Méthode du Polynôme annulateur)

(a) Un calcul matriciel donne $J^2 = \begin{pmatrix} 3&3&3\\3&3&3\\3&3&3 \end{pmatrix} = 3J$.

La relation de l'énoncé s'écrit $J = 5A - 2I_3$ et permet d'obtenir $(5A - 2I_3)^2 = 3(5A - 2I_3)$. On en déduit $25A^2 - 35A + 10I_3 = 0$.

Donc $P(X) = 5X^2 - 7X + 2$ est un polynôme annulateur.

(b) On réalise la division euclidienne de X^n par $P(X)$, on obtient formellement :
$X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n$.

Les racines de P sont 1 et 2/5. On en déduit le système : $\begin{cases} 1^n & = \alpha_n + \beta_n \\ (2/5)^n & = (2/5)\alpha_n + \beta_n \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \alpha_n & = (5/3)\,(1 - (2/5)^n) \\ \beta_n & = -(2/3) + (5/3)(2/5)^n \end{cases}$.

Puis $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(2/5)^n & 1-(2/5)^n & 1-1(2/5)^n \\ 1-(2/5)^n & 1+2(2/5)^n & 1-(2/5)^n \\ 1-(2/5)^n & 1-(2/5)^n & 1+2(2/5)^n \end{pmatrix}$.

2. (Méthode du Binôme de Newton)

(a) On a $J^2 = 3J$ donc on montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.
Initialisation : $k = 1$ $J^1 = 3^0 J$.
Hérédité : Soit $k \geq 1$ tel que $J^k = 3^{k-1}J$.
On a : $J^{k+1} = 3^{k-1}JJ = 3^{k-1}(3J) = 3^k J$.

(b) On peut donc appliquer la formule du binôme sur $2I_3$ et J qui commutent pour obtenir :
$A^n = 5^{-n}(2I_3+J)^n = 5^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}J^k = 5^{-n}2^nI_3 + 5^{-n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^{k-1}J$.

Ainsi $a_n = 5^{-n}2^n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

et $b_n = 5^{-n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}3^{k-1} = 5^{-n}3^{-1}\left((2+3)^n - 2^n\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.

3. La relation $5A^2 - 7A + 2I_3 = 0$ s'écrit $I_3 = \dfrac{1}{2}(7A - 5A^2) = \dfrac{1}{2}(7I_3 - 5A)A$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(7I_3 - 5A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Plusieurs méthodes possibles pour calculer A^{-n}.

— Inverser la matrice A^n à l'aide du pivot de Gauss-Jordan.
— Vérifier que A^{-n} obtenu en remplaçant n par $-n$ est l'inverse de A^n.
— Calculer les puissances de A^{-1} avec le polynôme annulateur $X^2P(1/X) = 2X^2 - 7X + 5$.
— Calculer les puissances de $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(5I_2 - J)$ avec la formule du binôme de Newton.

On obtient : $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(5/2)^n & 1-(5/2)^n & 1-1(5/2)^n \\ 1-(5/2)^n & 1+2(5/2)^n & 1-(5/2)^n \\ 1-(5/2)^n & 1-(5/2)^n & 1+2(5/2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (Méthode de diagonalisation)

1. Par la méthode du pivot on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Par le calcul, on trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. La matrice diagonale D est inversible car sa diagonale est non nulle.
   Donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$.
4. On trouve par récurrence pou $n \geq 0$ que $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Puis on a $A^{-n} = (A^n)^{-1} = P(D^n)^{-1}P^{-1} = PD^{-n}P^{-1}$.
   Or pour $n \in \mathbb{Z}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
   On en déduit que pour $n \in \mathbb{Z}, A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n-1 & 1-3^n \\ 3^n-2^n & 3^n+2^n-1 & 1-3^n \\ 3^n-2^n & 3^n+2^n-2 & 2-3^n \end{pmatrix}$.

Problème I : 1. Etude au voisinage de 0.

(a) Soit $x > 0$.
D'une part $\dfrac{1}{1+x} - (1-x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$ donc $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x}$.
D'autre part $(1 - x + x^2) - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x^3}{1+x} \geq 0$ donc $1 + x + x^2 \geq \dfrac{1}{1+x}$.

(b) On utilise la croissance de l'intégrale : si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
On a $x - \dfrac{1}{2}x^2 = \displaystyle\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t$,
$\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$
et $x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 = \displaystyle\int_0^x (1 - t + t^2)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi en intégrant sur $[0, x]$ l'inégalité précédente, on obtient bien :
$\forall x > 0, x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$

(c) Par opérations f est de classe C^∞ pour $x \neq 0$ et $x > -1$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.
On détermine la limite en 0 : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x) - 1} \to_{x\to 0} \ln'(1) = 1$ comme limite de taux d'accroissement. Donc $f(0) = 1$ permet de prolonger la fonction par continuité en 0.

(d) Pour $x > 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
Au numérateur, on reconnaît l'encadrement du 1.(b)
$$-x^2/2 \leq \ln(1+x) - x \leq -x^2/2 + x^3/3.$$
On en déduit que $\dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \dfrac{-1}{2} + \dfrac{x}{3}$.
Donc lorsque x tend vers 0, on obtient par encadrement que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to_{x\to 0} \dfrac{-1}{2}$.
C'est à dire f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

2. Variation et convexité de f.

   (a) On a vu que f est de classe C^∞ donc en particulier deux fois dérivable. Puis :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}.\\ f''(x) &= -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} - \frac{1}{(1+x)x^2} + 2\frac{\ln(1+x)}{x^3}\\ &= -\frac{3x+2}{x^2(x+1)^2} + 2\frac{\ln(1+x)}{x^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Puis } f'(x) &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{f(x)}{x}\\ &= \frac{1}{x(x+1)}[1 - f(x) - xf(x)]\\ &= \frac{1}{x+1}\left(-\frac{f(x)-1}{x} - f(x)\right)\\ &\to_{x\to 0} \frac{1}{1}\left(-f'(0) - f(0)\right)\\ &= 1/2 - 1 = -1/2 = f'(0).\end{aligned}$$

   Donc f' est bien continue en 0.

   (b) On a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)}\left(x - (x+1)\ln(1+x)\right)$.
   On note $g(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$ le numérateur de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $g'(x) = 1 - 1 - \ln(1+x) = -\ln(1+x) < 0$ et $g(0) = 0$.
   Donc g est strictement décroissante et $\forall x > 0, g(x) < g(0) = 0$ est strictement négative.
   Ainsi $f' < 0$ puis f est strictement décroissante.

   (c) On a $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(2\ln(1+x) - \dfrac{3x^2+2x}{(x+1)^2}\right)$.
   Le numérateur $g(x) = 2\ln(x+1) - \dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $g'(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{6x+2}{(x+1)^2} + 2\dfrac{3x^2+2x}{(x+1)^3} = \dfrac{2x}{(x+1)^3} > 0$.
   Donc g est une fonction croissante et $g(0) = 0$. Ainsi $\forall x > 0, g(x) > 0$ puis $f''(x) > 0$.
   On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1$ et $P_n(x) = 0$ conviennent.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule est acquise. En la dérivant une fois, on obtient :

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)}{(x+1)^n x^n} - n\frac{P_n(x)}{(x+1)^{n+1}x^n} - n\frac{P_n(x)}{(x+1)^n x^{n+1}}\\ +a_n\frac{1}{(x+1)x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{x(x+1)P_n'(x) - nx - n(x+1)}{(x+1)^{n+1}x^{n+1}} + a_n\frac{(x+1)^n}{(x+1)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$$

Donc $P_{n+1}(x) = x(x+1)P_n'(x) - n(2x+1)P_n(x) + a_n(x+1)^n$ est un polynôme qui convient. Et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ est le coefficient qui convient.

(b) Dans l'hérédité, on a déjà établit que $a_{n+1} = -(n+1)a_n$.
On conjecture de $a_n = (-1)^n n!$ et on le démontre par récurrence.

(c) On dispose de la formule $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.
La formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\ln(1+x))^{(k)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\
&= \ln(1+x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\
&= \ln(1+x)\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} \\
&= (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!}{k} \frac{1}{(1+x)^k x^{n-k+1}}.
\end{aligned}$$

(d) En identifiant les formules de la question 3.(a) et 3.(c). On obtient :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= -x^n(x+1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!}{k} \frac{1}{(1+x)^k x^{n-k+1}} \\
&= -(-1)^n n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(x+1)^{n-k} x^{k-1}
\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on obtient $P_2(x) = -2((x+1) + \frac{1}{2}x) = -(3x+2)$.
Cohérent avec la question 2.(a).

4. Etude de la suite récurrente autonome $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0$.

(a) f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Il faut donc démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. On peut par exemple montrer que $I = \mathbb{R}_+$ est un intervalle stable. En effet $f(I) =]\lim_{+\infty} f, f(0)] =]0,1] \subset I$ car f est décroissante et continue.
La suite n'est pas monotone car si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ car f décroissante.
Ainsi (u_n) croissante ssi (u_n) décroissante. Donc le seul cas possible serait (u_n) constante or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

(b) On a f convexe. Donc f' est croissante. Ainsi $f'(x) \in [f'(0), \lim_{+\infty} f'[= [-1/2, 0[$.
Donc f' est bornée et $\sup |f'| = 1/2$. D'après l'Inégalité des accroissement finis f est $(1/2)$-lipschitzienne.

(c) On note $g(x) = f(x) - x$. La fonction est continue sur $[0,1]$ avec $g(0) = 1 - 0 > 0$ et $g(1) = \ln(2) - 1 < 0$. D'après le TVI, il existe donc au moins un point fixe de $l \in]0,1[$ i.e. $g(l) = 0$.

Soit $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$ deux points fixes de f. On a $|l_2 - l_1| = |f(l_2) - f(l_1)| \leq \frac{1}{2}|l_2 - l_1|$ car f est $(1/2)$-contractante. Ainsi $|l_2 - l_1| = 0$ donc $l_1 = l_2$ et le point fixe est unique.

(d) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|u_n - l| \leq (1/2)^n$.
Initialisation : $n = 0$ On a $|u_0 - l| = l < 1 = (1/2)^0$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq (1/2)^n$.
Donc $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{1}{2}|u_n - l| \leq \frac{1}{2}(1/2)^n = (1/2)^{n+1}$.
Conclusion : $(1/2)^n \to 0$ donc par encadrement $|u_n - l| \to 0$ i.e. $u_n \to l$.

Problème II : (d'après CCINP TSI 2023)

1. (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donne la relation $X_{n+1} = AX_n$.

   (b) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n = A^n X_0$.
   Initialisation : $n = 0, A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$.
   On a $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

2. (a) On calcul $B^2 = B$. Donc B est idempotente et $\forall n \geq 1, B^n = B$.

   (b) On a $N = A - I_3 - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) On calcul $N^2 = 0$ donc N est nilpotente et $\forall n \geq 2, N^n = 0$.

   (d) On calcul $BN = 0$ et $NB = 0$ donc B et N commutent.
   On en déduit que $AB = (I_3 + B + N)B = B + B^2 = B(I_3 + B + N) = BA$ ainsi A et B commutent.

3. (a) On applique la formule du binôme de Newton sur I_3 et N qui commutent.
   On a $(I_3 + N) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n & & & \\ n & 1-n & n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On peut tester le candidat $C = I_3 - N$ (formule avec $n = -1$). On a $(I_3 + N)C = (I_3 + N)(I_3 - N) = I_3^2 - N^2 = I_3$. Donc $I_3 + N$ est inversible.

   (b) On applique la formule du binôme de Newton sur $I_3 + N$ et B qui commutent.

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I_3 + N)^{n-k} B^k \\ &= (I_3 + N)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (I_3 + (n-k)N)B \\ &= I_3 + nN + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B \text{ car } NB = 0 \\ &= I_3 + nN + (2^n - 1)B. \end{aligned}$$

Donc $A^n = \begin{pmatrix} 1+n & -n & n \\ 1+n-2^n & -n+2^n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme à la question précédente $A^{-1} = I_3 - N + (-1/2)B$ est le candidat inverse lorsque $n = -1$.

(c) On a $X_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Donc $A^n X_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1+n \\ 1+n-2^n \\ 1-2^n \end{smallmatrix}\right)$.

On en déduit que $u_1 + n, v_n = 1 + n - 2^n$ et $w_n = 1 - 2^n$.

(d) On obtient $u_n \to +\infty, v_n \sim -2^n \to -\infty$ et $w_n \to -\infty$.