Devoir Surveillé de Mathématiques n° 5
le samedi 20 janvier 2024 - durée 4h

Exercice 1 : Soit $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $A = \dfrac{1}{5}(2I_3 + J)$.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes et démontrent le même résultat.

1. (Méthode du Polynôme annulateur)
   (a) Montrer que $J^2 = 3J$ et en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2.
   (b) En déduire que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$ pour tout entier $n \geq 1$ avec des coefficients α_n et β_n que l'on déterminera.
2. (Méthode du Binôme de Newton)
   (a) Calculer J^n pour tout entier $n \geq 1$ en fonction de J.
   (b) En déduire que $A^n = a_n I_3 + b_n J$ pour tout entier $n \geq 1$ avec des coefficients a_n et b_n que l'on déterminera.
3. Montrer que A est une matrice inversible et calculer A^{-n} pour $n \geq 1$.

Exercice 2 : (Méthode de diagonalisation)

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera.
3. En déduire que A est une matrice inversible et calculer A^{-1}.
4. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème I : Soit $x \in]0, +\infty[$. On recherche à étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Etude au voisinage de 0.
   (a) Montrer l'inégalité : $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$.
   (b) En déduire que : $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$.
   (c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0.
   (d) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
2. Variation et convexité de f.
   (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. La fonction f' est-elle continue en 0 ?
   (b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
3. Dérivée successive de f.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ un réel et P_n un polynôme vérifiant :
   $$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$
   (b) Montrer que $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ et en déduire la valeur de a_n.
   (c) A l'aide de la formule de Leibniz montrer que :
   $$f^{(n)}(x) = a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n n!}{k} \frac{1}{(1+x)^k x^{n-k+1}}.$$
   (d) En déduire la valeur de $P_n(x)$ à l'aide d'une somme. On vérifiera $n = 2$ avec 2.(a)

4. Etude de la suite récurrente autonome $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie mais n'est pas monotone.
   (b) Montrer que f est $(1/2)$-contractante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Démontrer que f admet un unique point fixe l et que $0 < l < 1$.
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (1/2)^n$ et conclure.

Problème II : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère les suites définies par la récurrence $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= v_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= 0 \end{cases}$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Démontrer que $X_n = A^n X_0$.
2. (a) Calculer les puissances de B.
   (b) Déterminer les coefficients d'une matrice N telle que $A = I_3 + B + N$.
   (c) Montrer que N est nilpotente.
   (d) Montrer que B et N commutent. En déduire que A et B commutent.
3. (a) Calculer les puissances de $I_3 + N$. Cette matrice est-elle inversible ?
   (b) Calculer les puissances de A. Cette matrice est-elle inversible ?
   (c) En déduire une expression en fonction de n des suites u_n, v_n et w_n.
   (d) Déterminer les limites de ces trois suites.