Semaine 16 - Du 29 Janvier au 2 Février 2024

Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Généralités

Multiples et diviseurs. Division euclidienne.
La division est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
La congruence est une relation d'équivalence. Propriétés sur les sommes, produits et puissances.
Utilisation des congruences pour obtenir une divisibilité : $b|a \Leftrightarrow a = 0[b]$.

Plus Grand Commun Diviseur

Algorithme d'Euclide. Caractérisation de $pgcd(a, b)$ comme le maximum pour la relation $|$,
i.e. l'unique $d \in \mathbb{N}^*$ tel que : $d|a, d|b$ et $\forall k \in \mathbb{Z}^*, (k|a$ et $k|b) \Rightarrow k|d$.

Propriétés des pgcd et ppcm

Nombres premiers entre eux, théorème de Bézout et théorème de Gauss.
Résolution des équations diophantiennes linéaires.
La formule $pgcd(a, b)ppcm(a, b) = |ab|$.

Nombres premiers

Décomposition en produit de premiers, expression du *pgcd* et *ppcm*.
Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini.
Pour un premier p, $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$.

Les polynômes

Structure abstraite de $\mathbb{K}[X]$

Construction comme suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne en 0.
Définitions et propriétés de la somme, du produit et du produit par un scalaire.
Coefficient dominant, polynôme unitaire, degré et espace $\mathbb{K}_n[X]$.
Degré d'une somme, d'un produit, d'une puissance et d'une composée.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Diviseurs et multiples dans $\mathbb{K}[X]$. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.
Existence et unicité de la division euclidienne.
PGCD et algorithme d'Euclide. Polynômes premiers entre eux.
Théorème de Bézout et lemme de Gauss.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer et démontrer les formules $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
b) Montrer que T triangulaire est inversible ssi tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
c) Montrer que l'équivalence par lignes est une relation d'équivalence.
d) Résoudre une équation diophantienne linéaire avec les théorèmes de Bézout et de Gauss.
e) Programmer en Python le crible d'Eratosthène et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
f) Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.