

DM5 : Polynôme
à rendre le Lundi 26 Février 2024.

Exercice 1 : Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- 1) $X^9 - 3X^6 + 9X^3 - 27$.
- 2) $(X + 2)^6 + X^6$.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(X) = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1$.

- 1) Calculer $P_1(X)$, puis factoriser le sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Calculer $P_2(X)$, puis factoriser le sur $\mathbb{R}[X]$.
- 3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(X) = P_n(X)(X^{2^{n+1}} - X^{2^n} + 1)$.
- 4) En déduire le PGCD de P_{n_1} et P_{n_2} pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.
- 5) Démontrer que $P_n(X) = P_0(X^{2^n})$ et factoriser P_n sur $\mathbb{R}[X]$.
- 6) Calculer la somme et le produit des racines de $P_n(X)$.