

TD 12 : Espace vectoriel

12.1 Sous-espace vectoriel

Exercice 1 (★) Montrer que $F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 12u_{n+1} - 36u_n\}$ est un espace vectoriel avec deux méthodes.

Exercice 2 (★) Montrer que $F = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0\}$ est un espace vectoriel avec deux méthodes.

Exercice 3 (★) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 4 (★) Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

- a) $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$ c) $C = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$
b) $B = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$ d) $D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}.$

Exercice 5 (★) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes et $\Delta = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 6 (★★) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F \subset G \text{ ou } G \subset F)$.

Exercice 7 (★★) (*Complexifié de E*) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle et de la multiplication externe par les complexes définie, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in E \times E$, par : $(a + ib) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, a \cdot y + b \cdot x)$. Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 8 (★) Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{R} \cdot \omega = \{x \cdot \omega \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathbb{R} \cdot \omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

A quelle condition $\mathbb{R} \cdot \omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

12.2 Espaces supplémentaires

Exercice 9 (★) On considère $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$ et $D = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 (★) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 (★) Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$

et $G = \{f : x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 12 (★) Soient $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 13 (★★) Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E .

Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Exercice 14 (★★) Soient F et G deux sous- $\mathbb{K}$ -ev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

On considère H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G .

Montrer que F et H sont supplémentaires dans $F + G$.

12.3 Famille de vecteurs

Exercice 15 (★) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que u appartienne à $\text{Vect}(x, y)$.

Comparer alors $\text{Vect}(x, y)$, $\text{Vect}(x, u)$ et $\text{Vect}(y, u)$.

Exercice 16 (★) Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

- a) (x_1, x_2) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- d) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (★★) On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 18 (★★) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{kx}$.

Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 19 (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \rightarrow x^n$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.