

TD 11 : Analyse asymptotique

11.1 Recherche d'équivalent

Exercice 1 (★) Donner un équivalent simple de suites suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $n^4 + 3n^2 - 5$ | g) $\frac{1+a^n+n^\alpha}{\ln^\beta n+n^\alpha}$ suivant $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}_+^*$. |
| b) $3^n - n^3 + 10$ | h) $\sqrt{n^4 + 3n} - n^2$ |
| c) $\ln^n(n) + 3^n - n^9$ | i) $1 - e^{2\ln(1+\frac{1}{n})}$ |
| d) $\frac{3^n+2^n n^2}{\ln^2(n)-n^2}$ | j) $\ln(n + \frac{1}{n^5}) - \ln n$ |
| e) $\ln(1+n)\ln(1+\frac{1}{n})$ | k) $\sin(1 - \cos \frac{1}{n})$ |
| f) $\frac{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3-n}\sqrt{n}}$ | l) $\ln(\cos \frac{1}{n}) + \cos(\tan \frac{2}{n}) - 1$ |
| | m) $\sin \ln(1 + \frac{1}{2n^2})$ |

Exercice 2 (★) Soient u et v des suites réelles de limites nulles.
Montrer que $e^{u_n} - e^{v_n} \sim u_n - v_n$.

11.2 Recherche d'équivalent de suite autonome

Lemme de Cesàro :

Si la suite $u_n \rightarrow l$ alors la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow l$.

Exercice 3 (★★) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite réelle définie par $0 < u_0 < 1$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$.

- Montrer que la suite converge vers une limite l que l'on précisera.
- Montrer que la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}-l} - \frac{1}{u_n-l}\right)_{n \geq 0}$ converge et préciser sa limite.
- En utilisant le lemme de Cesàro, déterminer un équivalent de $(u_n - l)$.

Exercice 4 (★★) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \geq 1$
- Montrer que u_n est croissante.
- Montrer que la suite u_n tend vers $+\infty$.
- Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim 2$.
- En utilisant le lemme de Cesàro, en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 5 (★★) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n)$.

- Montrer que u_n croît vers $+\infty$.
- Déterminer la limite de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.
- En utilisant le lemme de Cesàro, en déduire un équivalent simple de u_n .

Exercice 6 (★★) On définit une suite (u_n) par $u_0 \in]0, \pi[$ et la relation $u_{n+1} = \sin u_n$.

- Montrer que $\lim u_n = 0$.
- Donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
- Calculer la limite de $v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$.
- En utilisant le théorème de Cesàro, en déduire un équivalent simple de u_n .

11.3 Développement limité

Exercice 7 (★) Calculer le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre indiqué :

- a) $DL_3(0) : \exp(\sin x)$ c) $DL_5(0) : \frac{1}{1-x^2-x^3}$ e) $DL_4(0) : \ln \left[\frac{1+\tan x}{1-\tan x} \right]$
b) $DL_4(0) : \ln(\cos x)$ d) $DL_4(0) : (1+x)^x$ f) $DL_3(0) : \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)$

Exercice 8 (★) Pour $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f_a(x) = \frac{x^a \ln x}{x^2-1}$.

- a) Montrer que f_a se prolonge par continuité à $\mathbb{R}_+$.
b) Le prolongement ainsi obtenu est-il dérivable en 0 et en 1 ?

Exercice 9 (★) Donner des équivalents simples des fonctions suivants pour $x \rightarrow 0$:

- a) $\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} - \frac{x}{3}$ b) $\tan(\tan x) - \operatorname{Arcsin} x$ c) $x^3 \sqrt[3]{x-1} + x^3$.

Exercice 10 (★) Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{sh}^3 x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln \sin x} \right]$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - ex^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e - (1+x)^{1/x} \right]^x$

11.4 Avec recherche d'idées

Exercice 11 (★)

- a) En utilisant une relation simple entre $\tan$ et $\tan'$, calculer le $DL_7(0)$ de $\tan$.
b) Adapter cette méthode pour calculer le $DL_7(0)$ de th .

Exercice 12 (★) Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \cos x - \frac{a+bx^2}{1+cx^2}$ est négligeable devant x^n avec n un entier maximal. Donner alors un équivalent simple de $f(x)$ en $x \rightarrow 0$.

Exercice 13 (★★) Montrer que l'application $f :]-1, +\infty[\rightarrow]-\frac{1}{e}, +\infty[$, $x \rightarrow xe^x$ est une bijection de classe C^∞ dont la réciproque est de classe C^∞ .

Calculer un développement limité de $f^{-1}(x)$ à l'ordre 2 en $x \rightarrow 0$.

Exercice 14 (★★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}x \mapsto \ln(1+x^2) - x$.

- a) Montrer que f est bijective.
b) Calculer un $DL_4(0)$ de f .
c) En déduire un $DL_4(0)$ de f^{-1} .

Exercice 15 (★★) Soit $f(x) = x^3 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$.

- a) Montrer que f admet un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais pas à l'ordre 3.
b) Montrer que f se prolonge de manière C^1 en 0 et préciser les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
c) Calculer le taux d'accroissement de $f'(x)$ en 0. La fonction f est-elle C^2 en 0 ?

11.5 Problèmes

Exercice 16 (★★) On cherche à étudier la fonction, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{x}$.

- a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0.
b) En déduire le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ et la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$. (On pourra étudier g vérifiant $g(\sqrt{x}) = f(x)$).
d) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels qu'on dispose du développement asymptotique suivant :

$$f(x) =_{x \rightarrow +\infty} a\sqrt{x} + b + \frac{c}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

- e) Tracer la courbe de la fonction f en précisant les tangentes et asymptotes connues.

Exercice 17 (★★★) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x + x^2 - nx$.

- a) Montrer que f_n admet un minimum μ_n atteint en un unique $x_n \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln n$.
c) En déduire un équivalent de μ_n .