

TD 14 : Application linéaire

14.1 Contexte explicite

Exercice 1 (★) Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer l'image et le noyau de chacune d'entre elles :

- a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x - 3y.$
b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ 3x-6y \end{pmatrix}.$
c) $f_3 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ix-y \\ x+iy \end{pmatrix}.$
d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+5y \\ x-2y \\ 2x-y \end{pmatrix}.$
e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+5y-z \\ -x+2y-2z \end{pmatrix}.$

Exercice 2 (★) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2, f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 4.$$

Calculer $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, le noyau et l'image de f .

Exercice 3 (★) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

- a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$f(v_1) = e_1, f(v_2) = e_2 \text{ et } f(v_3) = e_3.$$

- b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$f(v_1) = e_1, f(v_2) = e_2 \text{ et } f(v_3) = 2e_1 - e_2.$$

Exercice 4 (★) On voit ici $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$ -linéaire.

- a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}.$
b) A quelle condition f est-elle $\mathbb{C}$ -linéaire ?

Exercice 5 (★) Soit $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f((u_n)_{n \geq 0}) = (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}.$

- a) Montrer que f est linéaire et calculer son noyau et son image.
b) Démontrer que les suites géométriques de même raison forme un espace vectoriel.

Exercice 6 (★) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $f(P) = P + (1 - X)P'.$

- a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f).$

14.2 Contexte abstrait

Exercice 7 (★) Soit E de dimension n et f un endomorphisme nilpotent d'ordre n . On suppose ainsi $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $u \notin \text{Ker}(f^{n-1}).$

Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

Exercice 8 (★★) Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ des applications entre deux espaces vectoriels.

- a) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = h \circ f.$
b) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Im } g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ h.$

Exercice 9 (★★) Soient p et q deux projecteurs distincts et non nuls de E .

- a) Montrer que p et q sont non colinéaires.
b) Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0.$
c) Dans ce cas calculer l'image et le noyau de $p + q.$

Exercice 10 (★) Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . Montrer l'équivalence des assertions : $\text{Ker } f = \text{Im } f \Leftrightarrow f^2 = 0$ et $n = 2\text{rg}(f)$.

Exercice 11 (★★) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

- a) Montrer que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
- b) En déduire que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(\lambda f + g)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exercice 12 (★★) Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. On définit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f(u_1, u_2) = u_1 + u_2$.

- a) Montrer que f est linéaire.
- b) Déterminer le noyau et l'image de f .
- c) Quel formule démontre le théorème du rang appliqué à f .

Exercice 13 (★) Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, E)$ qui vérifient $f \circ g \circ f = f$.

- a) Montrer que pour tout $v \in E, v - (g \circ f)(v) \in \text{Ker } f$.
- b) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im}(g \circ f)$.
- c) En déduire que $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$.

Exercice 14 (★) Soit E un espace de dimension finie n . On dit qu'un sous-espace H est un hyperplan si H admet une droite comme supplémentaire.

- a) Calculer la dimension de H puis de $H_1 \cap H_2$ pour deux hyperplans.
- b) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer que $\text{Ker } f$ est un hyperplan.
- c) Montrer que tout hyperplan est le noyau d'une telle application.

Exercice 15 (★★) Soit E un espace de dimension finie. Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p_1, p_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

- a) Montrer que $\text{rg}(f) \in \{0, 1, 2\}$.
- b) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(p_1 \circ f) \cap \text{Ker}(p_2 \circ f)$.
- c) On suppose que $\text{rg}(f) = 1$. Montrer que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont liées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$.
- d) Montrer que tout espace de dimension $n - 2$ est le noyau d'une application surjective de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}^2)$.